Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea: Algebra Lineal. Determinantes MAT-210

14 de Mayo del 2001, Prof. Víctor González

1 Transformaciones n-lineales

1. Sea $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ con $A = (a_{ij})$. Calcule
$$\triangle(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

2. Considere los vectores $x_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})$,$x_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32})$ y $x_3 = (x_{13}, x_{23}, x_{33})$ en $\mathbb{R}^3$ suponga que son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Forme una matriz A poniendo los vectores como vectores columna, determine el volumen del paralelepípedo que generan estos tres vectores. Relacione con el ejercicio anterior. Determine fórmulas para el área y perímetro del paralelepípedo.

3. Considere $E = \mathbb{R}^3$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y e_1, e_2 y e_3 la base canónica. Calcule los siguientes 6 números reales $\triangle(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$ con σ recorriendo las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Generalice lo anterior al caso de la base canónica en $\mathbb{R}^n$.

4. Considere $E = \mathbb{R}^3$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y las siguientes funciones: $<, >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde $<, >$ es el producto interno euclidiano usual y $\times$ es el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

   Estudie la 2-linealidad, la simétria y la alternancia de ambas funciones.

5. Considere $E = \mathbb{C}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y la función $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definida por: $H((z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n)) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$.

   Demuestre ReH es una función 2-lineal simétrica y que ImH es una función 2-lineal alternada.

6. Considere E como espacio vectorial sobre k, $\dim_k E = n$ y F otro espacio vectorial sobre el mismo cuerpo k. Si $\triangle$ es una función determinante no nula en E demuestre que para cada aplicación n-lineal alternada $\varphi : E^n \to F$ existe un único vector $v \in F$ tal que

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \triangle(x_1, ..., x_n)v$$

7. Considere E como espacio vectorial sobre k $\dim_k E = n$ y $\triangle$ una función n-lineal alternada demuestre que:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \triangle(x, x_1, x_2, ..., \hat{x_j}, x_{j+1}, ..., x_n)x_j = \triangle(x_1, ..., x_n)x$$

en donde $\hat{x_j}$ significa que se ha omitido el vector x_j.

8. Considere E como espacio vectorial sobre k $\dim_k E = n$ y $\triangle$ una función n-lineal alternada y para $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$ la aplicación: $A : E^n \to \mathcal{L}(E, E)$ determinada por:

$$A(x_1, x_2, ..., x_n)(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \triangle(x, \varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(\hat{x_j}), ..., \varphi(x_n))x_j$$

   a) Demuestre que A es n-lineal alternada.
   b) Demuestre que existe un único elemento denotado por $\mathrm{ad}(\varphi)$ en $\mathcal{L}(E, E)$ de forma que: $A(x_1, x_2, ..., x_n) = \triangle(x_1, x_2, ..., x_n)\mathrm{ad}(\varphi)$. La transformación lineal $\mathrm{ad}(\varphi)$ es llamada la adjunta de φ.
   c) Considere la transformación lineal $\phi : E \to E$, demuestre que

$$\mathrm{ad}(\phi \circ \varphi) = \mathrm{ad}(\varphi) \circ \mathrm{ad}(\phi)$$

2 Determinantes

1. Sea E un k-espacio vectorial de $\dim E = n$, e_1,e_2,...,e_n una base de E y $\varphi : E \to E$ una transformacion k-lineal tal que $\varphi(e_i) = \alpha_i e_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Demuestre que $\det(\varphi) = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$

2. Sea E un k-espacio vectorial de $\dim E = n$, $\phi : E \to E$ una transformación lineal. Asuma que $E = E_1 \bigoplus E_2$ donde E_1 y E_2 son subespacios φ-estables, si denota por $\varphi_1 : E_1 \to E_1$ y $\varphi_2 : E_2 \to E_2$ las aplicaciones inducidas por φ. Demuestre que $\det(\varphi) = \det(\varphi_1)\det(\varphi_2)$.

3. Demuestre que si $A \in M(n \times n, k)$ es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

entonces $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)$.

4. Considere las siguientes matrices en $M(n \times n, k)$

   (a) $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0$ si $i < j$
   (b) $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = 1 - \delta_{ij}$
   (c) $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = 2$ si $i = j$ y $c_{ij} = 1$ si $i \neq j$
   (d) $D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = n$ si $i = j$ y $d_{ij} = -1$

   si $i \neq j$. Calcule el determinante de cada una de las matrices anteriores.

5. Considere el k-espacio vectorial $E = k^n$ y la transformación lineal $\varphi : E \to E$ determinada por

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

donde σ es una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Calcule el determinante de φ.