Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 1 Algebra Lineal MAT-210

Miercoles 23 de Mayo del 2000, Prof. Víctor González

§1. Espacios vectoriales

1. Sea E un k espacio vectorial, demuestre que : $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, si $c \neq 0$ y $c\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ entonces $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

2. En $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones ($k = \mathbb{R}$).

$$\overrightarrow{x} \bigoplus \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$$

$$\alpha \bigodot \overrightarrow{x} = -\alpha \overrightarrow{x}$$

   Que axiomas de espacio vectorial se cumplen para las operaciones $\bigoplus$ y $\bigodot$?

3. Se considera el cuerpo $k = \mathbb{Z}_2$ y el espacio vectorial $E = k^n$. Demuestre que E es un k-espacio vectorial. Cuantos vectores tiene este espacio vectorial? Cuantas bases distintas tiene este espacio vectorial? Cuantos subespacios de dimension 1 hay ? Cuantos subespacios de dimension $n - 1$ hay? Trate de responder las mismas preguntas si se considera $k = \mathbb{Z}_p$ con p un numero primo.

4. Demuestre que el conjunto de todas las funciones de variable real es un espacio vectorial sobre $k = \mathbb{R}$ si se considera la suma de funciones y el producto de una función por un escalar. Demuestre que el conjunto $\{f_n(t) = e^{nt} / n = 1, ...10\}$ es una familia linealmente independiente. Es de dimensión finita este espacio vectorial? .

5. Demuestre que $\mathbb{R}_3[x, y, z]$ el conjunto de los polinomios de grado ≤ 3 forman un espacio vectorial sobre $k = \mathbb{R}$. Determine la dimensión de este espacio vectorial. Determine 3 polinomios que sean invariantes cuando se realiza cualquier permutación de $\{x, y, z\}$.

§2. Subespacios y Bases

1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $k = \mathbb{R}$, si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ determine que subconjuntos forman un subespacio vectorial.

   a) todos los x tales que $x_1 \geq 0$
   b) todos los x tales que $x_1 = x_2$
   c) todos los x tales que $x_1 x_2 = 0$.

2. Caracterize geométricamente todos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ de acuerdo a su dimensión. Es $\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ un subespacio vectorial? Describa geométricamente .

3. Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ y los vectores $u_1 = (1, 0, i)$, $u_2 = (1 + i, 1, -1)$.
   a) Demuestre que ellos son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.
   b) Demuestre que los vectores $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (1, i, 1+i)$ pertenecen al subespacio vectorial U generado por u_1 y u_2.
   c)Demuestre que los vectores w_1 y w_2 forman una base de U.
   d) Determine las coordenadas de los vectores u_1 y u_2 en la base $\{w_1, w_2\}$.

4. Sea E un k espacio vectorial y U y V dos subespacios vectoriales. Demuestre que $U \bigcap V$ y $U + V$ son también subespacios vectoriales. Es $U \bigcup V$ un subespacio vectorial ?. Justifique su respuesta.

5. Determine si son verdaderas o falsas las siguentes afirmaciones:

   a) Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.
   b)Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.
   c)Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente
   d) Todo conjunto que contiene al vector nulo es linealmente dependiente.

6. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, demuestre que

   $$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

   es un subespacio vectorial. Determine una base para W. Encuentre un subespacio U tal que $W \bigoplus U = \mathbb{R}^4$.

7 Sea $\{v_1, v_2, ..., v_j, ..., v_n\}$ una base de un k-espacio vectorial E. Determine si son verdaderas o falsas las siguentes afirmaciones y demuestre cuando corresponda:

a) Si σ es una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ entonces el conjunto $\{v_\sigma(1), v_\sigma(2), ..., v_\sigma(j), ..., v_\sigma(n)\}$ es una base de E.
b) Si $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ entonces $\{v_1, v_2, ..., \lambda v_j, ..., v_n\}$ es una base de E.
c) Se tiene que $\{v_1, v_2, ..., \lambda v_j + v_k, ..., v_n\}$ es una base de E.

8. Considere el espacio vectorial $M_{2\times 2}(k)$ de matrices de 2×2. Sea U el subespacio vectorial formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

y V el subespacio formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} \delta & \zeta \\ -\delta & \eta \end{pmatrix},$$

Determine la dimensión de los subespacios U , V, $U + V$ y $U \bigcap V$.