Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 2 Algebra Lineal MAT-210

Jueves 30 de Agosto del 2000, Prof. Víctor González

§1. Matrices

1. Sea k un cuerpo y $M_{n\times n}(k)$ el álgebra de matrices de formato $n \times n$ con entradas en el cuerpo k. Construya los siguentes ejemplos: a) Dos matrices A y B tales que $AB \neq BA$.
   b) Dos matrices A y B no diagonales tales que $AB = BA$.
   c) a) Dos matrices A y B diferentes de la matriz O y tales que $AB = O$.
   d) Cinco matrices diferentes A, B, C, D y M tales que $AB = M$ y $CD = M$.
   e) Una matriz A que no sea la matriz nula y tal que $A^k = O$.
   f)Una matriz A que no sea la matriz identidad y tampoco sea diagonal y tal que $A^k = I$.

2. En $M_{n\times n}(k)$ se define la tranposicion de una matriz y la traza de una matriz. Demuestre entonces: a)Para cada par A y B se tiene que ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ y ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
   b) Para cada par A y B se tiene Traza(A+B)=Traza(A)+Traza(B) y Traza(AB)=Traza(BA).

3. Se considera el cuerpo $k = \mathbb{Z}_2$ y el álgebra de matrices $M_{2\times 2}(k)$. El objetivo de este ejercicio es estudiar ésta álgebra .
   a)Cuantos elementos tiene esta álgebra?
   b) Determine todas las matrices A tales que $AB = BA$ para cada $B \in M_{2\times 2}(k)$
   c) Determine todas las matrices A tales que existe B con $AB = I$.
   d) Determine todas las matrices A tales $A^2 = O$.
   e) Determine todas las matrices A tales $A^2 = I$.
   Estudie si existen matrices E_1, E_2,...,E_k tales que cualquier matriz $M \in M_{2\times 2}(k)$ puede expresarse como un producto de las matrices E_i. Cual es el k mínimo ?

4. Sea k un cuerpo y $M_{n\times n}(k)$ el álgebra de matrices de formato $n\times n$ con entradas en el cuerpo k, en $M_{n\times n}(k)$ se define la siguente operación, dadas dos matrices A y B de le asocia una nueva matriz $[A,B]$ con $[A,B]=AB-BA$. Demuestre entonces que esta operacion tiene las siguentes propiedades:
a) Para cada A y B en $M_{n\times n}(k)$ se tiene $[A,B]=-[B,A]$
b) $[A+C,B]=[A,B]+[C,B]$ y $[\lambda A,B]=\lambda[A,B]$ para cada $C\in M_{n\times n}(k)$ y cada $\lambda\in k$.
c)$[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$ y $[A,\lambda B]=\lambda[A,B]$ para cada $C\in M_{n\times n}(k)$ y cada $\lambda\in k$.
d)$[[A,B],C]+[[C,A],B]+[[B,C],A]=O$, para cada A, B y C en $M_{n\times n}(k)$.

5. En $M_{n\times n}(k)$ se define la siguente matriz T, $T=t_{i,j}$ con $t_{i,i+1}=1$ para cada $i\in\{1,2,...,n\}$ y $t_{i,j}=0$ en los otros casos.
a) Demuestre que $T^n=O$ y que $T^{n-1}\neq O$.
b)Encuentre todas las matrices que conmutan con la matriz T.

6. Considere el algebra $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices de 2×2. Sea R el subconjunto formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

Para $\theta\in\mathbb{R}$.
a) Demuestre que si $A,B\in R$ entonces $AB\in R$.
b) Si $A\in R$ encuentre $A^{-1}\in R$ tal que $AA^{-1}=I$.
c) Que relación tienen estas matrices con la circunferencia

$$\{(x,y)/x^2+y^2=1\}$$

.

7. En $M_{n\times n}(k)$ se considera el subconjunto de matrices S_n, este subconjunto consiste de matrices que tienen solamente 0 o 1 como entradas y de manera que hay solamente un 1 en cada fila y en cada columna.
a) Determine cuantos elementos tiene el conjunto S_n
b) Demuestre que si $A,B\in S_n$ entonces $AB\in S_n$
c) Sea $A\in S_n$ determine una matriz $X\in S_n$ tal que $AX^{-1}=I$.