Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 3 Algebra Lineal MAT-210

Jueves 7 de Septiembre del 2000, Prof. Víctor González

§1. Transformaciones Lineales

1. Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo k, consideraremos el espacio vectorial $\mathcal{L}_k(E, F)$.
   a) Caracterize el espacio vectorial $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   b) Encuentre una base de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, después haga lo mismo para $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
   c) Caracterize el espacio vectorial $\mathcal{L}_k(E, E)$ si $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$ y $E = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2)^2$.

2. Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo k y $\phi : E \to F$ una transformación lineal.
   a) Si U es un subespacio vectorial de E, demuestre que la aplicación restricción $\phi/U : U \to F$ también es una aplicación lineal.
   b) Suponga que $F = E$, un subespacio vectorial V se dice ϕ-estable si $\phi(v) \in V$ para cada $v \in V$. Demuestre que el núcleo y la imagen de ϕ son ϕ- estables.
   c)Puede existir una transformación lineal $\phi : E \to E$ tal que el núcleo y la imagen sean identicos?. Discuta según la dimensión de E.

3. Sea E un espacio vectorial sobre k de dimensión n, k un entero positivo y E_1, E_2,...,E_k subespacios vectoriales de E de manera que

$$\sum_{i=1}^{k} dim(E_i) > (k-1)n$$

   Demuestre que $\bigcap_{i=1}^{k} E_i \neq \phi$
   Indicación: Construya una aplicación lineal de $E_1 \bigoplus E_2 \bigoplus ... \bigoplus E_k$ en E^{k-1}.

4. Sea $E \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, entonces E puede ser considerado como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y/o como un $\mathbb{C}$- espacio vectorial. Discuta el valor de verdad

de las siguentes afirmaciones, justificando su respuestas.
a) Si una aplicación $\phi : E \to E$ es $\mathbb{R}$- lineal entonces es $\mathbb{C}$-lineal.
b) Si una aplicación $\phi : E \to E$ es $\mathbb{C}$- lineal entonces es $\mathbb{R}$-lineal.

5. Determine cuales de las siguentes aplicaciones son lineales:

   a)$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (2x - y + 3z, 6x - 3y + 9z)$
   b) $\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta(x, y, z) = (2x - y + 3z - 1, 6x - 3y + 9z - 2)$
   c)$\psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(x, y, z, t) = (x - t, y - t, z - t)$

   En el caso que la transformación respectiva sea lineal, determine una base para el núcleo y la imagen.

6. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x, y, z]$ sobre $k = \mathbb{R}$ formado por los polinomios de grado ≤ 3 en las variables x, y, z . Considere las siguentes transformaciones:

   a)$\frac{\partial}{\partial x}$: $\mathbb{R}_3[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x, y, z]$, donde $\frac{\partial}{\partial x}$ es la derivada parcial con respecto a la variable x.

   b)$\frac{\partial}{\partial y}$: $\mathbb{R}_3[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x, y, z]$, donde $\frac{\partial}{\partial y}$ es la derivada parcial con respecto a la variable y.

   c)$\frac{\partial^2}{\partial xy}$: $\mathbb{R}_3[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x, y, z]$, donde $\frac{\partial^2}{\partial xy}$ es la derivada parcial con respecto a la variable y y despues a la variable x.

   d)$\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x}$: $\mathbb{R}_3[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x, y, z]$, donde $\frac{\partial^2}{\partial x}$ es la segunda derivada parcial con respecto a la variable x y similarmente con respecto a y y z .

   En cada caso estudie si las transformaciones anteriores son lineales y cuando corresponda determine las dimensiones del núcleo y de la imagen.
   Además estudie las aplicaciones

$$\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial x}$$

donde $\circ$ denota la composición de aplicaciones.

§1. Transformaciones Lineales y Matrices

7. Sea $u_1 = (1,1)$ y $u_2 = (1,-1)$ una base de $\mathbb{R}^2$ denotada por $\mathcal{U}$, $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $v_1 = (1,0,-1)$,$v_2 = (1,2,1)$ y $v_3 = (0,-3,2)$ una base $\mathbb{R}^3$ denotada por $\mathcal{V}$.
   Determine entonces las siguentes matrices asociadas al problema 4.
   a)$M(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{U})$
   b) $M(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{V})$
   c)$M(\varphi, \mathcal{V}, \mathcal{U})$

8. Si usted ha determinada una base en el problema 5 tarea 1 y además tiene paciencia determine las matrices que corresponden en esa base a las aplicaciones lineales involucradas el problema 6 de esta tarea (orgía parcial).

9. Discuta justificando si existe una aplicación lineal $\phi : E \to E$ tal que la matriz de ϕ en cualquier base de E sea la misma.

10. Considere las matrices $M_{2\times2}(\mathbb{C})$. Determine todas las matrices $A \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$ tales que $A^2 = -I$. Describa el conjunto anterior mediante un objeto geométrico.
    Indicación: Es un superficie en $\mathbb{R}^3$.

11. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la base canónica denotada por $\mathcal{E}$. Se definen las aplicaciones lineales $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
    determinadas por $\rho(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$ $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ $\tau(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$
    a) Determine la matriz de cada una de las aplicaciones anteriores en la base canónica $\mathcal{E}$.
    b) Determine todas las posibles composiciones de estas aplicaciones, es decir $\rho \circ \rho$, $\rho \circ \sigma$, $\sigma \circ \tau$ etc. Verifique que hay 6 elementos, incluyendo

la identidad.
Considere el subespacio vectorial $H = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
c) Demuestre que este subespacio es invariante para las 6 transformaciones anteriores.
d) Demuestre que $u_1 = e_1 - e_3$ y $u_2 = e_2 - e_3$ forman una base de H que denotaremos por $\mathcal{U}$.
e) Determine la matriz de la restricción de las aplicaciones anteriores en la base $\mathcal{U}$.
f) Discuta si existe un subespacio vectorial de H que no sea trivial y que sea invariante por todas las 6 aplicaciones anteriores.
g) Discuta si se pueden generalizar las consideraciones anteriores a $\mathbb{R}^n$ y relacione con el problema 7 de la tarea 2.

§2. Problemas Diversos

12. Considere el espacio vectorial $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y una matriz A fija tal que $traza(A) \neq -1$ si se define $E_A = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})/X + {}^tX = 2traza(X)A\}$. demuestre que E_A es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y calcule su dimensión.

13. Sea A una matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que $A = O$ si y solo si $traza({}^tAA) = 0$. Es válido el mismo resultado si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.