Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 4 Algebra Lineal MAT-210

Jueves 26 de Octubre del 2000, Prof. Víctor González

§1. Espacios Euclideanos

1. Considere el espacio vectorial euclideano $\mathbb{E}^3$.

   a) Se considera el parelelepípedo P, las coordenadas de sus vértices en la base canónica son: $p_1 = (0,0,0)$, $p_2 = (0,b,0)$, $p_3 = (a,b,0)$, $p_4 = (a,0,0)$, $p_5 = (a,0,c)$, $p_6 = (0,0,c)$, $p_7 = (0,b,c)$, $p_8 = (a,b,c)$. Determine la longitud de sus diagonales interiores y el ángulo que ellas forman.

   b) Determine el volumen, el área lateral y el perímetro de las aristas de P.

   c) Si se denota por U el subespacio generado por el vector $u_1 = (a,b,c)$, encuentre una base ortogonal de $U^{\perp}$, después determine las coordenadas del paralelepípedo P en la nueva base que usted determinó.

   d) Determine explícitamente la transformación lineal $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que lleva la base canónica e_1, e_2 y e_3 en la base u_1, u_2 y u_3 que usted determinó previamente.

   e) Considere la transformación lineal $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinada por $\Psi(x,y,z) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})$, estudie como se transforma P bajo el efecto de Ψ.

   f) Estudie como cambia el volumen, el área lateral y el perímetro de las aristas de P bajo las transformaciones Φ y Ψ.

   g) Considere la esfera

   $$S^2 = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

   y el cono $C = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, estudie como se transforman estas superficies bajo las transformaciones Φ y Ψ.

2. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ sobre el cuerpo de los reales y la función $M : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ determinada por

   $$M((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$$

   a) Demuestre que M es una forma bilineal simétrica.

   b) Determine los subconjuntos de $(\mathbb{R}^4, M)$ en donde M es nula, es positiva definida, es negativa definida.

   c) ¿Es la restricción de M al subespacio $E = \{(x,y,z,t)/t = 0\}$ un producto interno?.

3. Sea E el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que consiste de las funciones continuas definidas en el intervalo $[-\pi, +\pi]$, considere la función

$$< f, g >= \left(\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)g(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

   a) Demuestre que $<,>$ es un producto interno en E.
   b) Determine explícitamente a que desigualdad da origen la desigualdad de Cauchy-Schwartz.
   c) Determine la norma de los vectores $f_k(x) = \sin(kx)$ si k es un entero positivo, si g es cualquier función continua de E interprete qué representa $\dfrac{< g, f_k >}{< f_k, f_k >}$.
   d) Estudie la ortogonalidad de las funciones $f_k(x) = \sin(kx)$ y $g_l(x) = \cos(lx)$ donde k y l son enteros positivos.

4. Considere $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como un $\mathbb{R}$- espacio vectorial. Se define

$$< A, B >= \mathrm{Traza}(AB)$$

   a) Discuta si $<,>$ es un producto interno en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   b) Si se considera el subespacio $MS_{2\times 2}(\mathbb{R})$, de matrices simétricas de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, discuta si $<,>$ es un producto interno en este subespacio.
   c) Si T es el subespacio de $MS_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consistente de matrices de traza nula, interprete este subespacio en términos de $<,>$ y determine su dimensión.

5. Demuestre que en un espacio euclideano $(E, <,>)$ un conjunto de vectores ortogonales no nulos es linealmente independiente.

6. En el espacio tridimensional euclideano $\mathbb{E}^3$, considere los vectores $u_1 = (3, 0, 4)$ $u_2 = (-1, 0, 7)$ $u_3 = (2, 9, 11)$. Mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt obtenga una base ortogonal.

7. Considere el espacio euclideano $\mathbb{E}^3$, un subespacio vectorial U de $\mathbb{E}^3$, y un vector v que no pertenezca a U encuentre una "mejor aproximación" a v por vectores de U, es decir un vector x de U tal que para cada vector y de U se tenga $\|u - x\| \leq \|u - y\|$.

   Resuelva lo anterior en el caso particular $U = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$ y $u = (1, 2, 3)$.

8. Considere el espacio euclideano $\mathbb{E}^n$, v un vector no nulo y la tranformación

$$\Omega_v : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$$

   definida por $\Omega_v(x) = x - 2\dfrac{< x, v >}{< v, v >}v$

   a) Demuestre que Ω_v es una tranformación lineal tal que $\Omega_v \circ \Omega_v = I$.
   b) Estudie si Ω_v es una transformación ortogonal.
   c) Estudie cómo actúa Ω_v en el subespacio V generado por el vector v y cómo actúa en el hiperplano $V^\perp$. ¿Porqué se llama una simetría?

d) Demuestre que el determinante de una simetría vale -1.

Ahora le proponemos considerar el caso particular $n = 3$ y denotamos por e_1, e_2, e_3, $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$

d) Exprese las matrices de las simetrías Ω_{e_1} Ω_{e_2} Ω_{e_3} Ω_{v_1} en la base canónica. ¿Cuánto vale el determinante de las simetrías anteriores?

e) Describa geométricamente las transformaciones:

$$\begin{array}{lcl} \Omega_{e_1} \circ \Omega_{e_2}, & & \Omega_{e_1} \circ \Omega_{e_3}, \\ \Omega_{e_2} \circ \Omega_{e_3} & \text{y} & \Omega_{e_1} \circ \Omega_{v_2} \end{array}$$

f) Dado el hiperplano $H = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$ determine explícitamente una simetría con respecto a este hiperplano.

VGA/24 de octubre de 2000