Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

# Tarea # 5 Algebra Lineal MAT-210

Jueves 9 de Noviembre del 2000, Prof. Víctor González

## §1. Formas bilineales

1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre el cuerpo de los números reales y la forma bilineal $B$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   a) Encuentre dos vectores $u$ y $v$ tales que $B(u,v) \neq B(v,u)$.

   b) Se considera la base : $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ $u_3 = (1,1,1)$. Determine la matriz de la forma bilineal $B$ en la base anterior.

2. Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre el cuerpo de los complejos y la función $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ determinada por

$$M((z_1, z_2, ..., z_n), (w_1, w_2, ..., w_n)) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + ... + z_n\bar{w}_n$$

   a) Demuestre que $H$ es una forma hermitiana positiva definida.

   b) Si se denota por $S = ReH$ y por $E = ImH$ demuestre que $S$ es simétrica y $E$ es alternada (o antisimétrica ) es decir $E(z,w) = -E(w,z)$.

   c) Considere el caso $n = 1$, describa $S$ y $E$ que relación tienen con el producto interno y con el determinante?

3. Sea $E$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $B$ una forma bilineal en $E$.

   a) Sea $u \in E$, demuestre que la aplicación $L_u$ definida mediante $L_u(v) = B(v,u)$ es un elemento del dual $E^*$ de $E$ .

b) Si se denota por $L : E \to E^*$ la aplicación definida por $L(u) = L_u$, demuestre que $L$ es lineal.

c) Demuestre que $B$ es no degenerada si y solamente si la aplicación $L$ anterior es un isomorfismo de espacios vectoriales.

d) Dé un ejemplo de una forma bilineal no degenerada en $\mathbb{R}^2$ y un ejemplo de una forma bilineal degenerada en $\mathbb{R}^2$.

4. Considere el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ y las formas cuadráticas siguientes:

   $q_1 = x_1x_2$, $q_2 = x_1x_3 + x_4^2$ y $q_3 = 2x_1x_2 - x_3x_4$

   Determine las formas bilineales que le corresponden

5. Sean $B_1$ y $B_2$ dos formas bilineales y $q_1$ y $q_2$ las formas cuadráticas asociadas.

   a) Demuestre que $B_1 + B_2$ es una forma bilineal.

   b) Demuestre que $q_1 + q_2$ es la forma cuadrática asociada a $B_1 + B_2$.

6. Considere el espacio vectorial $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Una matriz $A$ es antisimétrica si ${}^tA = -A$.

   a) Demuestre que las matrices antisimétricas forman un subespacio vectorial.

   b) Demuestre que el espacio vectorial $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la suma directa del espacio vectorial de las matrices simétricas con el espacio vectorial de las matrices antisimétricas.

   c) Determine la dimensión del espacio de las matrices antisimétricas.

   d) Si $A$ es una matriz antisimétrica entonces $\det(A) = 0$ si $n$ es impar.

   e) La traza de una matriz antisimétrica es nula.

7. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la forma cuadrática $e$ definida por $e(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$:

   a) Determine la forma bilineal $E$ determinada por $e$.

   b) Estudie si la forma $E$ es simétrica o antisimétrica y si es no degenerada.

c) Determine las matrices de las tranformaciones lineales que preservan a la forma $E$.

d) Demuestre que los coeficientes de las matrices anteriores pueden escribirse en función de las funciones trigonómetricas circulares $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$.

8. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la forma cuadrática $m$ definida por $m(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$:

   a) Determine la forma bilineal $M$ determinada por $m$.

   b) Estudie si la forma $M$ es simétrica o antisimétrica y si es no degenerada.

   c) Determine las matrices de las tranformaciones lineales que preservan a la forma $M$.

   d) Demuestre que los coeficientes de las matrices anteriores pueden escribirse en función de funciones trigonómetricas hiperbólicas $\cosh(\theta)$ y $\sinh(\theta)$.