Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 6 Algebra Lineal MAT-210

Lunes 13 de Noviembre del 2000, Prof. Víctor González

§1. Diagonalización

1. Considere las siguientes matrices que representan a transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en si mismo.

$$A \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \ : \ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \ : \ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

   Para cada una de ellas encuentre el polinomio característico, los valores propios, los vectores propios y el polinomio minimal.

2. Considere la matriz de una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en si mismo dada por:

$$C : \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

   Demuestre que C es diagonalizable y encuentre la base en la cual ella es diagonal.

3. Se considera el espacio vectorial $M_{n\times n}(k)$ de matrices sobre un cuerpo k.

   a) Demostrar que si A, B son matrices de $M_{n\times n}(k)$ y $(I - AB)$ es invertible entonces $(I - BA)$ también es invertible.
   b) Demuestre que las matrices AB y BA tienen los mismos valores propios.
   c) Estudie como están relacionados los valores propios de una matriz A y los valores propios de ${}^tA$.

d) Estudie como están relacionados los valores propios de una matriz A y de su inversa A^{-1} cuando esta existe.

4. Demuestre que los valores propios de una matriz A de 2×2 con coeficientes reales son numeros reales.

5. Considere las aplicaciones lineales: $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, definidas por:

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 - x_2, x_1, x_2 + x_4, 0) \\
\theta(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_2, x_3, x_4, x_1, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \\
\delta(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (0, x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

Determine los polinomios característicos y minimales de φ, θ y δ.

6. Considere un espacio vectorial E de dimensión n sobre un cuerpo k y $\Phi : E \to E$ k-lineal, Φ se dice nilpotente si existe l tal que $\Phi^l = 0$

a) Demuestre que Φ es nilpotente si y solamente si su polinomio característico es $c_\Phi(\lambda) = (-\lambda)^n$.

b) Estudie como debe ser el polinomio minimal de Φ.

c) Explicite algunos ejemplos de transformaciones lineales nilpotentes que usted haya encontrado en tareas anteriores.

d) ¿ Es la transformación $I - \Phi$ invertible?

La transformación lineal $\Phi : E \to E$ se dice idempotente si existe m tal que $\Phi^m = I$

d) Determine como son los valores propios de una transformación lineal idempotente.

e) ¿Qué tipo de tranformaciones idempotentes hay si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

7. Considere un espacio vectorial E de dimensión n sobre un cuerpo k y $\Phi : E \to E$ k-lineal.

Una bandera para Φ en E es una sucesión de subespacios $\{E_1, E_2, \ldots, E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n\}$ tales que $E_i \subseteq E_{i+1}$ y $\Phi(E_i) \subseteq E_i$
Una base de bandera para $\{E_1, E_2, \ldots, E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n\}$ es una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ de E de manera que $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ es una base de E_i.

a) Demuestre que si $\{v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ es una base de bandera para Φ entonces la matriz de Φ en esa base es una matriz triangular.

b) Estudie que condiciones deben satisfacer k y Φ para que exista una base de bandera.

8. Considere dos tranformaciones lineales φ y ϕ de $\mathbb{R}^4$ cuyas matrices en la base canónica estan dadas por las matrices F y S que siguen:

$$F \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Para ambas transformaciones lineales determine el polinomio característico, el polinomio minimal, los valores propios y una base de vectores propios de manera que las matrices F y S puedan ser diagonalizadas.

9. Considere un espacio vectorial E de dimensión n sobre un cuerpo k y $\Phi : E \to E$ k-lineal, sea $\vec{x} \in E$ el subspacio cíclico de $\vec{x}$ por Φ denotado por $C(\vec{x}, \Phi)$ es el subespacio generado por los vectores $\Phi^l(\vec{x})$ con $l \geq 0$. Un vector se dice cíclico si este subespacio es E.

a) Estudie la existencia de vectores cíclicos para la tranformación lineal nula y para la identidad.

b) ¿ Puede un vector propio ser un vector cíclico de Φ?

c) Si el polinomio característico y el polinomio minimal de Φ son iguales. ¿Existen vectores cíclicos?

10. Una matriz $J = (j_{m,n})$ es una matriz elemental de Jordan con valor propio a si $j_{m,m} = a$, $j_{m,m+1} = 0$ o $j_{m,m+1} = 1$ y $j_{m,n} = 0$ en el resto de los casos.

a) Demuestre que una matriz elemental de Jordan es la suma de una matriz escalar y una matriz nilpotente.

b) Determine el polinomio característico y el polinomio minimal de una matriz de Jordan elemental.

c) Caracterice las matrices de Jordan elementales J tales que $J^m = I$.

11. Considere las matrices $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

    a) Si $n = 2$ determine todas las posibles formas de Jordan que puede tener la matriz la matriz A.

    b) Si $n = 3$ determine todas las posibles formas de Jordan que puede tener una matriz A.