Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

# Tarea # 1 Variable Compleja MAT-235

Lunes 30 de Julio del 2001, Prof. Víctor González

## §1. Números complejos

1. Resuelva la ecuación cuádratica:

$$z^2 + (a + ib)z + c + id = 0$$

2. Demuestre que el conjunto de todas las matrices reales de la forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

con la adición y multiplicación de matrices constituye un cuerpo isomorfo al cuerpo de los números complejos.

3. Considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E = \mathbb{R}^2$ y la transformación $\mathbb{R}$-lineal $R$ tal que $R^2 = -I_{2\times 2}$. Demuestre que $E$ puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial complejo con la ayuda de la transformación $R$.

4. Se considera el polinomio de grado 3 con coeficientes complejos

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

Estudie bajo que condiciones en sus coeficientes sus raíces son colineales.

Si las raíces de $P(z)$ no son colineales, estudie si es posible en el triángulo que ellas forman, inscribir una elipse cuyos focos sean las raíces de $P'(z)$.

5. Exprese en forma algebraica una raíz cúbica de la unidad diferente de 1, haga lo mismo con una raíz quinta de la unidad.

6. Determine el centro y el radio del círculo que circunscribe al triángulo con vértices $a_1$, $a_2$ y $a_3$. Exprese el resultado en forma simétrica.

7. Demuestre que
$$\left|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\right| < 1$$
si $|a| < 1$ y $|b| < 1$.

   Que condiciones deben satisfacer $a$ y $b$ para que se tenga ?
$$\left|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\right| = 1$$

8. Considere las $n-1$ diagonales de un $n$-ágono regular inscrito en el círculo unitario, obtenidas conectando un vértice con el resto. Demuestre que el producto de sus longitudes es $n$.

9. Considere las siguientes funciones: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por : $f(z) = \frac{1}{z}$, $m(z) = |z|$, $a(z) = \text{argumento}(z)$ y $g(z) = \bar{z}$.

   Para cada una de ellas, estudie el dominio, el recorrido, inyectividad, epiyectividad e inversas en el caso de existir.

   Estudie la continuidad y diferenciabilidad de ellas considerándolas como funciones de dos variables reales $(x, y)$ y en el caso que corresponda dibuje el gráfico correspondiente.

10. Se considera la función $\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $\Psi(z) = \frac{z(z-a)}{az-1}$ donde $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Estudie su restricción al círculo unitario.

11. Se considera la función $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$

    Estudie su restricción al semiplano superior extendido
$$\bar{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$$

    .