Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 1 Variable Compleja MAT-235

Lunes 6 de Agosto del 2001, Prof. Víctor González

§2. Esfera de Riemann

1. Considere la proyección esterográfica $\Pi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ demuestre que dos puntos p, q de la esfera de Riemann son antipodales si y solamente si $\Pi(p)\tilde{\Pi}(q) = -1$.

2. Demuestre que la proyección esterográfica envia los círculos de la esfera de Riemann en círculos o rectas del plano complejo $\mathbb{C}$.

3. Un cubo tiene sus vértices en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre la proyección esterográfica de sus vértices.

4. Se considera la transformación $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ de la esfera de Riemann en si misma determinada por

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

   si z es diferente de $\frac{-d}{c}$ y $\varphi(\frac{-d}{c}) = \infty$.

   Demuestre que dichas transformaciones forman un grupo con respecto a la composición de funciones.

5. Estudie el efecto geométrico en $\hat{\mathbb{C}}$ de la transformación particular $\varphi(z) = \frac{1}{z}$. cual es su efecto en un círculo de radio 1 ?

6. Estudie el subgrupo cíclico generado por $\varphi(z) = 2z$. Que puede decir de $\varphi^n(z)$ y de $\varphi^{-n}(z)$ si n tiende a infinito?

7. Denotaremos por $GL(2, \mathbb{C})$ al grupo de matrices 2×2 con coeficientes complejos y por $Mob(\mathbb{C})$ al grupo del problema 4, si denotamos por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \to Mob(\mathbb{C})$$

determinada por $\Phi(M) = \frac{az+b}{cz+d}$ es un epimorfismo de grupos, determine explícitamente el núcleo de Φ y caracterize $Mob(\mathbb{C})$.