Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 3 Variable Compleja MAT-235

Lunes 13 de Agosto del 2001, Prof. Víctor González

§1. Funciones holomorfas

1. Estudie la continuidad de la función:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+1}{z-i} & \text{si } z \neq i, \\ 3i & \text{si } z = i \end{cases}$$

2. Si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas. Demuestre, utilizando la definición, que las funciones $f+g$ y fg son también funciones holomorfas. Determine rigurosamente fórmulas para las derivadas de $f+g$ y fg.

3. Determine:

$$\lim_{z \to 2i} \left(\frac{z-2i}{z^4-16} \right)$$

4. Si $z = x + iy$ y se se define $f(z) = x + iy^2$.

   Demuestre que f es diferenciable real y calcule la derivada de f.

   Estudie si existe un subconjunto U abierto de $\mathbb{C}$ de manera que la restricción de f al abierto U sea holomorfa.

5. Estudie la existencia de funciones a valores reales de una variable compleja.

6. Determine todas las funciones holomorfas $f(z)$ tales que $|f(z)|$ es constante.

7. Encuentre el polinomio armónico más general de la forma:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^2$$

   determine la función armónica conjugada y la función holomorfa correspondiente.

8. Sea $P(z)$ un polinomio en $\mathbb{C}[z]$ tal que la parte real de todos sus ceros es negativa. Demuestre que la parte real de todos los ceros del polinomio derivado $P'(z)$ también es negativa.

9. Sea $z \in \mathbb{C}$, $\sigma(z) = \bar{z}$ y U un abierto de $\mathbb{C}$ que sea σ-estable.

   Demuestre que si f es holomorfa en U entonces $g = \sigma \circ f \circ \sigma$ es holomorfa en U.

   Sean f_1, f_2,...,f_n funciones holomorfas en U se define:

   $$g_n = \sigma \circ f_n \circ \sigma \circ f_{n-1} \circ ... \sigma \circ f_1 \circ \sigma$$

   demuestre que si n es impar entonces g_n es holomorfa en U.

   Estudie qué sucede si n es impar.

10. Sea f una funcion definida en el plano complejo $\mathbb{C}$ un número complejo ω se llama un período de f si $f(z + \omega) = f(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$, si f tiene un período $\omega \neq 0$ entonces f se dice periódica.

    Si f es periódica, demuestre que el conjunto Ω_f de los períodos de f constituye un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$.

11. Considere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E = \mathbb{R}^2$ y la transformación $\mathbb{R}$-lineal R tal que $R^2 = -I_{2\times 2}$. Usted ya verificó en la tarea 1 que E puede ser dotado de una estructura de espacio vectorial complejo. Sea $f : E \to E$ una función diferenciable real, encuentre condiciones para que f sea diferenciable compleja con respecto a R.

12. Considere $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, exprese df en términos de dz y $d\bar{z}$. Demuestre que f si f es holomorfa entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.