Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 4 Variable Compleja MAT-235

Viernes 24 de Agosto del 2001, Prof. Víctor González

§1. Funciones racionales

1. Demuestre que si $z = a + ib$ es un cero de orden k del polinomio $P(z) \in \mathbb{R}[z]$ entonces $\bar{z}$ es también un cero de orden k.

2. Considere $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ y sea z_1 un cero de $P(z)$. Demuestre que: $P(z) = (z - z_1)^k P_{n-k}(z)$ si y solamente si
$$P^{(1)}(z_1) = P^{(2)}(z_1) = ... = P^{(k-1)}(z_1) = P^{(k)}(z_1) = 0$$
y $P^{(k+1)}(z_1) \neq 0$.

3. Considere las siguentes funciones racionales $R_1, R_2 : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definidas por $R_1(z) = \frac{z^3}{z^5}$ y $R_2(z) = \frac{z(z+1)^2}{(z-1)(z-2)^3}$.
Determine los ordenes de R_1 y R_2. Determine los ceros y polos.

4. Estudie desde un punto de vista geométrico la función racional de Joukowski definida por. $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

5. Descomponga en fracciones parciales las siguentes funciones racionales $R_1(z) = \frac{z^4}{z^3-1}$ y $R_2(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$.

6. Sea $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ con ceros a_1, a_2,....a_n todos distintos y $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ de grado menor que n demuestre que.
$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q^{(1)}(a_k)(z - a_k)}$$
Demuestre que dados n valores a_k y n valores c_k existe un unico polinomio $P(z)$ (polinomio interpolador de Lagrange) que toma los valores c_k en los puntos a_k.