Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 5 Variable Compleja MAT-235

Viernes 24 de Agosto del 2001, Prof. Víctor González

§1. Series Formales

1. Sean $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $R(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ y $T(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ series formales, denotaremos por $k[[x]]$ el conjunto de series formales con coeficientes en el cuerpo k. Se define.

$$S(x) + R(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

y para cada $\lambda \in k$

$$\lambda S(x) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) x^n$$

demuestre que $k[[x]]$ con estas dos operaciones constituye un k-espacio vectorial.

2. En $k[[x]]$ se consideran las operaciones de suma y producto definidas por:

$$S(x) + R(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

$$S(x) \cdot R(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n$$

con $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Demuestre que para cada $S(x)$, $R(x)$, $T(x)$ en $k[[x]]$:

$$a)(S(x) + R(x)) + T(x) = S(x) + (R(x) + T(x))$$

b) Para cada $S(x)$ existe $O(x) \in k[[x]]$ tal que

$$S(x) + O(x) = O(x) + S(x) = S(x)$$

c) Para cada $S(x)$ existe $-S(x) \in k[[x]]$ tal que

$$S(x) + (-S(x) = (-S(x) + S(x) = O(x)$$

d) Para cada $S(x)$ y $R(x)$ se tiene

$$S(x) + R(x) = R(x) + S(x)$$

e) Para cada $S(x)$, $R(x)$ y $T(x)$ se tiene:

$$(S(x) + R(x)) \cdot T(x) = S(x) \cdot T(x) + R(x) \cdot T(x)$$

f) Para cada $S(x)$, $R(x)$ y $T(x)$ se tiene:

$$(S(x) \cdot R(x)) \cdot T(x) = S(x) \cdot (R(x) \cdot T(x))$$

g) Para cada $S(x)$ y $R(x)$ se tiene

$$S(x) \cdot R(x) = R(x) \cdot S(x)$$

h) Para cada $S(x)$ existe $I(x) \in k[[x]]$ tal que

$$S(x) \cdot I(x) = I(x) \cdot S(x) = S(x)$$

3. Sea $S(x) \in k[[x]]$, se dice que $S(x)$ es invertible si existe $S^{-1}(x) \in k[[x]]$ tal que $S(x) \cdot S^{-1}(x) = I(x)$.

   a) Demuestre que si S es invertible entonces: $\text{ord}(S) = \text{ord}(S^{-1}) = 0$

   b) Demuestre que si $a_0 \neq 0$ entonces S es invertible.

   c) Si $Q(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ y $\text{ord}(Q) \geq 1$, demuestre que $S(Q(x))$ es también una serie formal.

4. Considere las series formales complejas $S(z)$ y $Q(z)$ convergentes con disco de convergencia $D(0, r)$, $r \geq 0$.

   Demuestre que las series $S(z) + Q(z)$, $S(z) \cdot Q(z)$ y $\lambda S(z)$, con $\lambda \in k$ tienen el mismo disco de convergencia.

   Si $S(z)$ y $Q(z)$ tienen radios de convergencia ρ_S y ρ_Q estudie si $S(Q(z))$ es convergente.

5. Si se denota por $k\{\{x\}\}$ al subconjunto de series formales convergentes. Estudie que propiedades de los ejercicios 1 y 2 se preservan.

6. Sean $S(x)$ y $R(x)$ en $k[[x]]$. Demuestre que si $S(x) \cdot R(x) = O(x)$ entonces $S(x) = O(x)$ o $R(x) = O(x)$.

7. Sea $S(x)$ en $k[[x]]$, con $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ se define $S^{(1)}(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^n$. Demuestre que la aplicación

$$d : k[[x]] \to k[[x]]$$

determinada por $d(S) = S^{(1)}$ es k-lineal.

Determine fórmulas para $d(S \cdot R)$ y para $d(\frac{1}{S})$ si S es invertible. Estudie la restricción de d al subespacio vectorial $k\{\{x\}\}$.