Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 6 Variable Compleja MAT-235

Lunes 27 de Agosto del 2001, Prof. Víctor González

§1. Funciones analíticas

1. Encuentre un desarrollo en serie de potencias alrededor de $z_0 = 1$ de la función $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$ y determine cual es su radio de convergencia.

2. Determine el radio de convergencia de las siguentes series formales:

$$\sum_{n\geq 0} n^p z^n \quad \sum_{n\geq 0} z^n \quad \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!} z^n$$

$$\sum_{n\geq 0} n! z^n \quad \sum_{n\geq 0} z^{n!} \quad \sum_{n\geq 0} q^{n^2} z^n$$

si $|q| \leq 1$.

3. Sean a, b y c numeros complejos , con c no siendo un entero menor o igual que cero. Se considera la serie formal:

$$S(x) = 1 + \frac{ab}{c}x^1 + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + ...$$
$$+\frac{a(a+1)...(a+n-1)b(b+1)...(b+n-1)}{n!c(c+1)...(c+n-1)}x^n + ...$$

Determiner su radio de convergencia ρ_S.

Demuestre que para $|z| \leq \rho_S$ la función analítica $S(z)$ que ella define satisface la ecuación diferenecial:

$$z(1-z)S^{(2)} + (c - (a+b+1)z)S^{(1)} - abS = 0$$

4. Se considera la serie formal compleja $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ cuyos coeficientes estan definidos por las siguentes relaciones de recurrencia:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, n \geq 2$$

en que α y β son numeros reales dados.

a) Demuestre que para $n \geq 1$ se tiene $|a_n| \leq (2c)^{n-1}$ donde $c = \max(|\alpha|, |\beta|, \frac{1}{2})$. Deduzca que el radio de convergencia de $S(z)$ es no nulo.

b)Demuestre que se tiene;

$$(1 - \alpha z - \beta z^2)S(z) = z$$

para $|z| < \rho_S$ y deduzca que

$$S(z) = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}$$

c) Si z_1 y z_2 son las raíces de $\beta x^2 + \alpha x - 1 = 0$. Determine a_n en terminos de z_1 y z_2.

5. Se considera la función analítica $f(z) = e^z$ se define $\cosh(z) = \frac{(e^z + e^{-z})}{2}$ y $\sinh(z) = \frac{(e^z - e^{-z})}{2}$.

Determine fórmulas de adición para cosh y sinh.

Determine el más pequeño período de la función $g(z) = e^{iz}$.

Si se denota por $(\mathbb{R}, +)$ al grupo aditivo de los numeros reales y por S^1 al grupo multiplicativo de los numeros complejos de módulo 1. Estudie la aplicación

$$h : \mathbb{R} \to S^1$$

determinada por $h(y) = e^{iy}$.

6. Se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que la función f tiene derivadas de todos los ordenes.

Estudie si f es una función analítica real en una vecindad del origen.