Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tarea # 8 Variable Compleja MAT-235

Miercoles 26 de Septiembre del 2001, Prof. Víctor González

§1. Teorema de Cauchy

1. Un subconjunto C del plano complejo $\mathbb{C}$ es convexo, si para par de puntos $z, w \in C$ el segmento de línea que los une esta completamente contenido en C.

   Un subconjunto S del plano complejo $\mathbb{C}$ es estrellado, si existe un punto $z_0 \in S$ tal que el segmento de línea entre z_0 y cualquier punto $z \in S$ esta completamente contenido en S.

   a) Sean γ y η dos curvas cerradas completamente contenidas en el subconjunto convexo C, demuestre que γ y η son homotópicas.

   b) Demuestre que un subconjunto estrellado del plano complejo es simplemente conexo.

   c) Considere el plano complejo y retire un segmento de recta partiendo del origen, demuestre que este subconjunto de $\mathbb{C}$ es simplemente conexo.

   d) Estudie si la unión de dos subconjuntos simplemente conexos es simplemente conexo.

2. Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y $\gamma : [0,1] \to U$ un camino, se define $\eta(t) = \gamma(1-t)$ para $t \in [0,1]$

$$\rho(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si} 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \eta(2t-1) & \text{si} \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   Demuestre que ρ es un camino cerrado homotópico a un punto en U.

3. Calcule el valor de $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ si γ es un círculo de radio 1.

4. Calcule $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ si γ es un círculo de radio 2

5. Calcule el valor de $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$ si γ es un círculo de radio 1.

6. Calcule $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+4}dz$ si γ es un círculo de radio 1

7. Calcule
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}d\theta$$

8. Sea f una función holomorfa en todo el plano complejo y tal que $|f(z)| < |z|^n$ para algun n y para $|z|$ suficientemente grande, demuestre que entonces f es un polinomio.

9. Encuentre un camino $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ cuya imagen sea la elípse:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
calcule de dos maneras diferentes la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deduzca que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)} = \frac{2\pi}{ab}$$