authorVíctor González-Aguilera

## 1. Integrales de línea

Consideremos una función de la variable real $t \in \mathbb{R}$ a valores complejos

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

si ella es continua en un intervalo $[a, b]$ denotaremos por

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

claramente se tienen las siguentes propiedades:

(1) Para cada par de funciones $f(t)$ y $g(t)$ continuas a valores complejos se tiene:

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

(2) Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$$

El lector esta invitado a demostrar a modo de ejercicio

**Ejercicios 1.1.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $a < b$ entonces:*

$$\mid \int_a^b f(t)dt \mid \leq \int_a^b \mid f(t) \mid dt$$

**Definition 1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, una curva curva diferenciable por pedazos contenida en $\Omega$, es una función $\gamma : [a, b] \to \Omega$ donde $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = z(t)$ y estas funciones son derivables a pedazos.*

Esta definición nos permite, no solo considerar curvas completamente suaves, sino también curvas con una cantidad finita de "esquinas".

**Example 1.1.** *Sean $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ las curvas definidas por $\gamma_(t) = e^{it}$ y*

$$\gamma_2 = \begin{cases} 4t & t \in [0, \frac{1}{4}], \\ 1 + 4i(t - \frac{1}{4}) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}], \\ 4(\frac{3}{4} - t) + i & t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}], \\ 4i(1 - t) & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

*ellas corresponden, como vemos en la figura, al círculo de radio $1$, recorrido en el sentido contrario de las manecillas de los relojes antiguos y a un cuadrado de lado $1$ que comienza en $(0, 0)$ sigue a $(1, 0)$ a $(1, i)$ a $(0, i)$ y regresa a $(0, 0)$.*

Como el alumno lector ha probablemente visto antes, la curva es la función y no solamente el dibujo de ella. Asi las curvas

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$

definidas por $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2(t) = e^{2it}$ respectivamente definen el mismo dibujo, pero son curvas distintas.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva diferenciable a pedazos, la integral de $f(z)$ sobre la curva $\gamma$ que denotaremos por:

$$\int_\gamma f(z)dz$$

estará dada por:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z^{'}(t)dt$$

donde hemos convenido que $\gamma(t) = x(t) + iy(y) = z(t)$.

Vale la pena notar que $f \circ z : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua y como la curva es diferenciable a pedazos la integral de la derecha tiene sentido.

A modo de ejemplo calcularemos algunas integrales:

**Example 1.2.** *Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la curva diferenciable por pedazos dada por $\gamma(t) = z(t) = e^{it}$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función continua, definida por: $f(z) = z^m$ con $m > 0$ tendremos:*

$$\int_\gamma z^m dz = \int_0^{2\pi} e^{imt} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \cos(m+1)dt + i\int_0^{2\pi} \sin(m+1)dt = 0$$

*Sea ahora $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la curva diferenciable por pedazos dada por $\gamma(t) = z(t) = e^{it}$ y $f : \mathbb{C} - \{(0, 0)\} \to \mathbb{C}$ la función continua, definida por: $f(z) = \frac{1}{z}$ tendremos:*

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi i$$

Una de las propiedades más importantes de la integral:

$$\int_\gamma f(z)dz$$

es su invariancia bajo un cambio de parámetro.

Supongamos que hacemos un cambio de parámetro. $t(\tau) = t$ con $\tau \in [\alpha, \beta]$ y que $t(\tau)$ es diferenciable y con derivada siempre positiva entonces

$$\int_a^b f(z(t))z^{(1)}(t)dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z^{(1)}(t(\tau))t^{(1)}(\tau)d\tau$$

y la integral es la misma si utiliza el parámetro $t$ o el parámetro $\tau$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva diferenciable por pedazos dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = z(t)$, si hacemos el cambio de parámetro $t = -\tau$ tendremos la curva: $-\gamma : [-b, -a] \to \Omega$ definida por $-\gamma(\tau) = (x(\tau), y(\tau)) = z(-t)$ y si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua tendremos:

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

El lector puede verificar que si una curva $\gamma$ es subdividida en $n$ arcos $\gamma_1$, $\gamma_2$,..., $\gamma_n$ entonces:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

Como ejercicio el lector puede hacer:

**Ejercicios 1.2.** *Calcular las integrales:*

$$\int_\gamma f(z)dz \qquad \int_\gamma g(z)dz$$

*si* $f(z) = z^m$ *con* $m > 0$ *y* $g(z) = \frac{1}{z}$*, siendo* $\gamma$ *la curva que es el borde de un cuadrado de lado* 2 *cuyo baricentro es el* $(0,0)$ *recorrida en el sentido contrario de las manecillas del reloj.*

El lector puede aprovechar de recordar de sus cursos anteriores: que si $z : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una curva derivable con derivadas continuas $z(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$, la longitud de arco estaba dada por:

$$\int_a^b \mid z^{'}(\tau) \mid d\tau$$

Aprovechemos de proponer dos ejercicios.

**Ejercicios 1.3.** *Sea* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *una curva diferenciable a pedazos y* $f(z)$ *una función continua, si* $M = max_{z\in\gamma} \mid f(z) \mid$ *y* $L$ *es el largo de* $\gamma$ *entonces:*

$$\mid \int_\gamma f(z)dz \mid \leq ML$$

**Definition 2.** *Una forma diferencial es una expresión*

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

*donde* $P, Q$ *son funciones continuas a valores reales.*

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva diferenciable por pedazos dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = z(t)$ y $\omega$ una forma diferenciable definida en $\Omega$, podemos definir la integral de $\Omega$ sobre $\gamma$ mediante:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (P(x(t), y(t))x^{(1)}(t) + Q(x(t), y(t))y^{(1)}(t))$$

Se puede verificar que si se hace un cambio de parámtro $t(u) = t$ con derivada continua, diferenciable y positiva la integral no cambia.

Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ una función holomorfa, para definir:

$$\int_\gamma f(z)dz$$

si $z = x + iy$, podriamos haber considerado:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy)$$

y tendremos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

y podriamos haber tomado lo anterior como una definicion de:

$$\int_\gamma f(z)dz$$

en terminos de formas diferenciales.

Ahora haremos una disgreción sobre formas diferenciables, por el momento asumiremos la siguente proposición:

**Proposition 1.1.** *Sea $\Omega$ un dominio (abierto y connexo) de $\mathbb{C}$. Para cualquier par de puntos $z, w \in \Omega$ existe un camino diferenciable a pedazos completamente contenido en $\Omega$ uniendo $z$ con $w$:*

Sea $\Omega$ un dominio (abierto y connexo) de $\mathbb{C}$, $F$ una función derivable con derivada continua

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

una curva diferenciable, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, uniendo $p$ y $q$ dos puntos de $\Omega$, es decir

$$\gamma(a) = (x(a), y(a)) = p \qquad \gamma(b) = (x(b), y(b)) = q$$

Queremos estudiar la dependencia de:

$$\int_\gamma \omega$$

con respecto a la curva $\gamma$.

Si para la forma diferencial, se tiene: $\omega = dF$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy)$$

$$= \int_a^b (\frac{\partial F(x(t), y(t))}{\partial x} x^{'}(t)dt + \frac{\partial F(x(t), y(t))}{\partial y} y^{'}(t)dt)$$

$$= \int_a^b dF(x(t), y(t))dt = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a)) = F(q) - F(p)$$

y en este caso el valor de la integral solo depende del punto inicial y el punto final de $\gamma$.

**Definition 3.** *Una forma diferencial $\omega$ definida en un dominio $\Omega$,se dirá exacta si existe una función $F$ derivable con derivada continua, definida en $\Omega$, de manera que $dF = \omega$. La función $F$ se llamará una primitiva de la forma diferencial $\omega$.*

Se tiene la siguente proposición

**Proposition 1.2.** *Sea $\Omega$ un dominio (abierto y connexo) de $\mathbb{C}$ y $\omega$ una forma diferenciable definida en $\Omega$.*

(1) *Si $\omega$ es exacta, entonces*
$$\int_\gamma \omega$$
*solo depende de los puntos inicial y final de la curva $\gamma$.*
(2) *Si $F : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función derivable con derivada continua y $dF$ es identicamente nula en $\Omega$ entonces $F$ es constante.*
(3) *Si $\omega$ es exacta, entonces*
$$\int_\gamma \omega = 0$$
*para cada curva cerrada contenida en $\Omega$.*

**Demostración:**La aserción 1 ya ha sido demostrada.

Sean $p, q \in \Omega$, de la proposición anterior, existe una curva $\gamma$ diferenciable a pedazos uniendo $p$ y $q$

$$\int_\gamma dF = F(q) - F(p)$$

$$\int_{\gamma} 0 = 0 = F(q) - F(p)$$

y $F(p) = F(q)$ para cada par de puntos de $\Omega$.

Sin pérdida de generalidad consideremos

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

una curva diferenciable cerrada completamente contenida en $\Omega$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, es decir

$$\gamma(0) = (x(0), y(0)) = \gamma(1) = (x(1), y(1)) = p$$

, sea $\gamma(\frac{1}{2}) = q$ y $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos curvas

$$\gamma_1 : [0, \frac{1}{2}] \to \Omega \qquad \gamma_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to \Omega$$

definidas por:

$$\gamma_1(t) = \gamma(t) \qquad \gamma_2(t) = \gamma(t)$$

tenemos

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

como $\gamma_1$ empieza en $p$ y termina en $q$, $\gamma_2$ empieza en $q$ y termina en $p$.

$$\int_{\gamma} \omega = (F(q) - F(p)) + (F(p) - F(q)) = 0$$

□

La existencia de formas que no son exactas en un abierto connexo de $\mathbb{R}^2$ puede ser verificada por el lector a traves del ejercicio que sigue

**Ejercicios 1.4.** *Sea $\Omega \cong \mathbb{C} - (0,0)$ y $\omega$ la forma diferencial definida por:*

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

*demuestre que $\omega$ no es exacta.*

Se tiene la siguente proposición:

**Proposition 1.3.** *Sea $\Omega$ un dominio (abierto y connexo) de $\mathbb{C}$, $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ una forma diferencial una condición necesaria y suficiente par que la integral*

$$\int_{\gamma} \omega$$

*dependa solamente de los puntos final e inicial de $\gamma$ es que exista una función $U(x,y)$ en $\Omega$ de manera que:*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

**Demostración:** La suficiencia ya la hemos demostrado, bosquejaremos la prueba de la necesidad, la cual probablemente el alumno lector ya la ha visto en MAT III o MAT IV.

Elejimos un punto fijo $(x_0, y_0) \in \Omega$ unido a $(x, y) \in \Omega$ por una curva poligonal $\gamma$, cuyos segmentos sean paralelos a los ejes de coordenadas (como en la figura virtual).

Como $(x_0, y_0)$ esta fijo y la integral depende solo de los puntos inicial y final podemos definir la función:

$$U(x,y) = \int_\gamma (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

Si elejimos el último segmento de $\gamma$ paralelo al eje $x$, la variable $y$ será constante y

$$\int_{(x_1,y)}^{(x,y)} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_{(x_1,y)}^{(x,y)} P(x,y)dx + k$$

donde $k$ es una constante y tenemos que $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$ de manera similar elijiendo el último segmento paralelo al eje $y$ se puede demostrar que: $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ □

Recapitulando,una integral de línea solamente depende de los puntos iniciales y finales de la curva si y solamente si la forma que se integra es exacta.

Se tiene la siguente proposición:

**Proposition 1.4.** *Sea $\Omega$ un dominio (abierto y connexo) de $\mathbb{C}$, $\omega$ una forma diferencial, si*

$$\int_\gamma \omega = 0$$

*para cada curva cerrada diferenciable a pedazos entonces $\omega$ es una forma diferencial exacta.*

De manera natural podemos preguntarnos:

Cuando

$$f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$$

es una forma exacta?

Para ello debiera existir una función diferenciable $F(z)$ (que llamaremos una primitiva de $f(z)$) en $\Omega$ tal que:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = f(z) \qquad \frac{\partial F(z)}{\partial y} = if(z)$$

y se tiene que:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = -i\frac{\partial F(z)}{\partial y}$$

es decir $F$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, ademá s si $f$ es continua, $dF = f$ entonces $F$ es derivable con derivada continua y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir $F$ es holomorfa en $\Omega$ y se tiene la proposición:

**Proposition 1.5.** *Sea $\Omega$ un dominio (abierto y connexo) de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma$ curva diferenciable a pedazos contenida en $\omega$. La integral*

$$\int_\gamma f(z)dz$$

*depende de los puntos extremos de $\gamma$ si y solamente si $f(z)$ es la derivada de una función $F(z)$ holomorfa en $\Omega$.*

**Ejercicios 1.5.** *Demuestre que:*

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$$

*para cada curva cerrada del plano, si $n \geq 0$. Estudie la integral anterior, si $n < 1$.*

## 2. Teoremas de Cauchy

Hay varias formas del teorema de Cauchy, ellas difieren esencialmente en el contexto topológico, más que es su contenido analítico. Comenzaremos con el caso topológicamente más sencillo, el de un rectángulo $R$ del plano complejo, su perimetro consiste de una curva orientada diferenciable a pedazos. (ver figura virtual). El lector notará que $R$ es un subconjunto cerrado del plano complejo. Reproduciremos una versión del teorema de Cauchy, con una bonita demostración de Emile Goursat.

**Theorem 2.1** (Cauchy-Goursat)**.** *Sea $R$ un rectángulo del plano complejo, $f(z)$ una función holomorfa en $R$, entonces.*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

*si $\partial R$ es el borde de $R$.*

**Demostración:** Denotaremos por :

$$\mu(R) = \int_{\partial R} f(z)dz$$

dividimos el rectángulo $R$ en 4 rectángulos congruentes $R_1$,$R_2$,$R_3$ y $R_4$ como en la (figura virtual):

$$\int_{\partial R} = \int_{\partial R_1} + \int_{\partial R_2} + \int_{\partial R_3} + \int_{\partial R_3}$$

como no se puede tener que para cada uno de los 4 rectángulos $R_i$ $(i \in \{1, ..., 4\})$

$$\mid \mu(R_i) \mid < \frac{1}{4} \mid \mu(R) \mid$$

, entonces hay al menos un rectángulo supongamos $R_1$ tal que

$$\mid \mu(R_1) \mid \geq \frac{1}{4} \mid \mu(R) \mid$$

El rectángulo $R_1$ lo dividimos de manera similar, supongamos que el rectángulo, que denotamos por $R_2$ satisface:

$$\mid \mu(R_2) \mid \geq \frac{1}{4} \mid \mu(R_1) \mid$$

continuamos el proceso, tendremos una sucesión encajada de rectángulos.

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset ... \supset R_n \supset ...$$

que satisfacen:

$$\mid \mu(R_n) \mid \geq \frac{1}{4} \mid \mu(R_{n-1}) \mid$$

entonces

$$\mid \mu(R_n) \mid \geq \frac{1}{4^n} \mid \mu(R) \mid$$

Los rectángulos $R_n$ estan convergiendo a un punto $w \in R$, es decir para cada vecindad $D(w, \delta) = \{z / \mid z - w \mid < \delta\}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $R_n \subseteq D(w, \delta)$ para $n \geq n_o$.

Como $f(z)$ es holomorfa en $w \in R$, para cada $\epsilon > 0$ se puede elejir un $\delta$ tal que :

$$\mid \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f^{'}(w) \mid < \epsilon$$

es decir.

$$\mid f(z) - f(w) - (z - w)f^{'}(w) \mid < \epsilon \mid z - w \mid$$

para $\mid z - w \mid < \delta$.

Tendremos:

$$\mu(R_n) = \int_{\partial(R_n)} f(z)dz = \int_{\partial(R_n)} (f(w) + f^{'}(w)(z - w) + \epsilon \mid z - w \mid)dz$$

$$\mu(R_n) = f(w) \int_{\partial(R_n)} 1dz + f^{'}(w) \int_{\partial(R_n)} (z - w)dz + \int_{\partial(R_n)} \epsilon(z) \mid z - w \mid)dz$$

Las integrales

$$\int_{\partial(R_n)} 1dz \qquad \int_{\partial(R_n)} (z - w)dz$$

son nulas, ya que 1 es la derivada de la función holomorfa $z$, $(z - w)$ es la derivada de la función holomorfa $\frac{1}{2}(z - w)^2$ y la curva $\partial(R_n)$ es cerrada.

Examinemos la integral:

$$\int_{\partial(R_n)} \epsilon \mid z - w \mid dz = \epsilon \int_{\partial(R_n)} \mid z - w \mid dz$$

tenemos.

$$\epsilon \int_{\partial(R_n)} \mid z - w \mid dz \leq \epsilon \int_{\partial(R_n)} \mid z - w \mid\mid dz \mid$$

si denotamos por $d_n$ y por $L_n$ la diagonal y el largo del perímetro de $R_n$. Si $d$ y $L$ es la diagonal y $L$ el largo del perímetro de $R$, se tiene $d_n = \frac{1}{2^n}d$ y $L_n = \frac{1}{2^n}L$ y podemos acotar:

$$\mu(R_n) \leq \frac{1}{4^n}\epsilon dL$$

ello para $n > n_0$.

Como teniamos:

$$\mid \mu(R_n) \mid \geq \frac{1}{4^n} \mid \mu(R) \mid$$

$$\mid \mu(R) \mid \leq 4^n \mid \mu(R_n) \mid \leq 4^n \frac{1}{4^n}\epsilon dL$$

$$\mid \mu(R) \mid$$

puede hacerse arbitrariamente pequeo:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

$\square$

El lector puede aprovechar de revisar de su curso MAT IV el teorema de Green en el plano:

$$\oint_C (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\int_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones con derivadas parciales continuas en la región $R$ definida por un contorno cerrado simple $C$.

**Ejercicios 2.1.** *Considere una función $f(z)$ holomorfa en una región $R$, definida por un contorno cerrado simple $C$ y con primera derivada continua en $R$. Demuestre entonces:*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Del teorema anterior se tiene el siguente corolario:

**Corollary 2.1.** *Sea $U$ un abierto de $\mathbb{C}$ y $f(z)$ una función holomorfa en $U$, entonces $f(z)$ admite localmente una primitiva que es holomorfa.*

La holomorfía de la función $f(z)$ en el rectángulo $R$, puede ser debilitada y se tiene el siguente teorema de Cauchy.

**Theorem 2.2.** *Sea $R'$ una región obtenida de un rectángulo del plano complejo, al cual se le han sacado un número finito de puntos $w_1, w_2, ..., w_n$ y $f(z)$ una función holomorfa en $R'$. Si:*

$$\lim_{z \mapsto w_i} (z - w_i) f(z) = 0$$

*para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

*si $\partial R$ es el borde de $R$.*

**Demostración:** Como el rectángulo $R$ puede ser dividido en rectángulos, de manera que cada $w_i$ pertenezca solamente a uno de ellos, basta considerar el caso de un punto $w$.

Supongamos que dividimos $R$ en 9 rectángulos, de manera que el rectángulo $R_0$ es un cuadrado y $w \in R_0$ es su centro, tendremos que:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{\partial R_0} f(z)dz$$

ya que, en los 8 rectángulos diferentes de $R_0$ se puede aplicar el primer teorema de Cauchy.

Como

$$\lim_{z \mapsto w} (z - w) f(z) = 0$$

para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de manera que

$$| (z - w) f(z) | < \epsilon$$

para cada $z$ tal que $| z - w | < \delta$, elejimos el cuadrado $R_0$ de manera que $| z - w | < \delta$ para $z \in \partial R_0$ tendremos:

$$| f(z) | \leq \frac{\epsilon}{| z - w |}$$

lo que implica:

$$|\int_{\partial R} f(z)dz |= \epsilon \int_{\partial R_0} \frac{| dz |}{| z - w |}$$

si el cuadrado $R_0$ tiene lado $a$ pequeo, se tiene:

$$\int_{\partial R_0} \frac{| dz |}{| z - w |} < \frac{4a}{\frac{a}{2}}$$

de donde:

$$\int_{\partial R} f(z)dz < 8\epsilon$$

y se tiene el resultado. □

Como ya hemos visto: la integral de una función holomorfa sobre una curva cerrada no es necesariamente nula. Ello depende de ciertas propiedades topológicas del dominio $\Omega$ del plano, por ejemplo nuestro primer teorema de Cauchy consideraba $\Omega$ como un rectángulo del plano complejo. Ahora veremos que también se tiene un teorema de Cauchy si $\Omega$ es un disco abierto del plano complejo.

**Theorem 2.3.** *Sea $D(z_0, r)$ un disco abierto del plano complejo y $f(z)$ una función holomorfa en $D(z_0, r)$ entonces:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

*para cada curva cerrada $\gamma$ completamente contenida en $D(z_0, r)$.*

**Demostración:** Consideremos como el la figura virtual, el segmento $\gamma_1$ que une el punto fijo $z_0 = (x_0, y_0)$ mediante una línea horizontal hasta $(x, y_0)$, seguido de una línea vertical que va de $(x, y_0)$ al punto $z = (x, y)$, definimos la función:

$$F_1(z) = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

tendremos que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = if(z)$.

Si ahora, consideramos el segmento $\gamma_2$ que une el punto fijo $z_0 = (x_0, y_0)$ mediante una línea vertical hasta $(x_0, y)$, seguido de una línea horizontal que va de $(x_0, y)$ al punto $z = (x, y)$, definimos la función:

$$F_2(z) = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

tendremos que: $F_1$ y $F_2$ definen la misma función $F(z)$ de donde:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(z) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$$

la función $F(z)$ es holomorfa en $D(z_0, r)$ con derivada $f(z)dz$ y se tiene el teorema. □

También se tiene el teorema que sigue, cuya demostración es dejada como ejercicio al lector.

**Theorem 2.4.** *Sea $D^{'}(z_0, r)$ una región obtenida de un disco del plano complejo, al cual se le han sacado un número finito de puntos $w_1, w_2, ..., w_n$ y $f(z)$ una función holomorfa en $D^{'}(z_0, r)$. Si:*

$$\lim_{z \mapsto w_i} (z - w_i)f(z) = 0$$

*para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

*para cada curva $\gamma$ completamente contenida en $D(z_0, r)$.*

Como el lector lo habrá notado, tenemos teoremas de Cauchy para dos tipos de dominios, terminaremos la sección, revisando el tipo de dominio, en el cual tiene validez universal el teorema de Cauchy.

## 3. Homotopía

Consideremos como en las figuras virtuales, dos tipos de dominios $\Omega_1$ y $\Omega_2$ del plano complejo, el primero sin hoyos y el segundo con un hoyo.

Intuitivamente, en el primero $\Omega_1$, dos curvas diferenciables $\gamma_1$ y $\gamma_2$ con iguales puntos finales e iniciales pueden deformarse continuamente una en la otra. De manera equivalente: la curva cerrada $\gamma_1 + \gamma_2$ puede deformarse a un punto.

En el segundo dominio $\Omega_2$, dos curvas diferenciables $\gamma_1$ y $\gamma_2$ con iguales puntos finales e iniciales, separadas por el hoyo del dominio ( como en la figura virtual),intuitivamente, **no** pueden deformarse continuamente una en la otra, o de manera equivalente:la curva cerrada $\gamma_1 + \gamma_2$ **no** puede deformarse a un punto.

Precisaremos lo anterior, introduciendo la noción de homotopía y de dominios simplemente conexos del plano.

Con objeto de simplificar, se considerán curvas parametrizadas por el intervalo $[0, 1]$, restricción que no es fundamental.

**Definition 4.** *Sea $U$ un abierto del plano complejo y:*

$$\gamma_1 : [0, 1] \to U \qquad \gamma_2 : [0, 1] \to U$$

*dos caminos (curvas) que tengan el mismo punto inicial y el mismo punto final, es decir:*

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p \qquad \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$$

*Diremos que $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son homotópicas con extremidades fijas $p$ y $q$, si existe una aplicación continua:*

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \to U$$

*que satisfaga:*

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \qquad H(0, u) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$$

$$H(t, 1) = \gamma_2(t) \qquad H(1, u) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$$

También se puede dar la definición de homotopía, para dos curvas cerradas, definición que se deja como ejercicio al lector.

**Example 3.1.** *Sean $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos curvas cerradas del plano complejo, definidas por*

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2} \qquad \gamma_2(t) = e^{it}$$

*para $t \in [0, 2\pi]$, como en la figura virtual.*

*Una homotopía entre $\gamma_1$ y $\gamma_2$ puede ser definida mediante:*

$$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$$

*con:*

$$H(t, u) = (\frac{1}{2} + \frac{u}{2})e^{it} + (\frac{1}{2} - \frac{u}{2})$$

Denotaremos por: $\gamma_0 : [0, 1] \to \mathbb{C}$, la siguente curva especial, definida por $\gamma_0(t) = p \in \mathbb{C}$ para cada $t \in [0, 1]$.

Sea $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable con $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

Para $0 \leq u \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1$ los complejos:

$$z = up + (1 - u)\gamma(t)$$

yacen en el segmento de línea que va de $p$ a $\gamma(t)$.

La aplicación:

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$$

definida por:

$$H(t, u) = up + (1 - u)\gamma(t)$$

es una homotopía entre $\gamma$ y $\gamma_0$, intuitivamente las curvas

$$H(t, u) = \gamma_u(t)$$

van deformandose hacia $p$, la deformación podrá realizarse si en el "interior" de $\gamma$ no hay "hoyos". Ello motiva la siguente definición:

**Definition 5.** *Sea $\Omega$ un abierto connexo del plano, diremos que $\Omega$ es simplemente conexo, si cada curva cerrada diferenciable a pedazos es homotópica a un punto en $\Omega$.*

Sea $E$ un subconjunto del plano, $p \in E$, diremos que $E$ es estrellado en relación a $p \in E$, si para cada punto $z \in E$ el segmento de recta que una a $p$ con $z$ esta completamente contenido en $E$.

**Proposition 3.1.** *Sea $E$ un abierto estrellado del plano complejo con relación a $p \in E$, entonces $E$ es simplemente connexo.*

**Ejercicios 3.1.** *Demuestre que los siguentes subconjuntos del plano complejo son simplemente connexos: Un abierto convexo, el interior de un disco y el interior de un cuadrado.*

A continuación enunciaremos dos resultados fundamentales que permiten, determinar el dominio de validez de los teoremas de Cauchy.

**Proposition 3.2.** *Sea $U$ un abierto del plano complejo y $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos caminos homotópicos con extremidades fijas entonces:*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

*para cualquier forma $\omega$ exacta en $U$.*

**Proposition 3.3.** *Sea $U$ un abierto del plano complejo y $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos caminos cerrados homotópicos como caminos cerrados entonces:*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

*para cualquier forma $\omega$ exacta en $U$.*

Ellos permiten demostrar el siguente teorema con que terminamos este capítulo.

**Theorem 3.1.** *Cada forma diferencial exacta en un abierto simplemente connexo $D$ del plano complejo tiene una primitiva en $D$.*

## 4. Indice de un punto respecto a una curva

Recordemos que si:

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C}/z = e^{it}\} \qquad C_k = \{z \in \mathbb{C}/z = e^{ikt}\}$$

eran circulos de radio 1 y centro $z = (0,0)$ del plano complejo, teniamos que:

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} = 2\pi i \qquad \int_{C_k} \frac{1}{z} = 2k\pi i$$

este resultado puede generalizarse, mediante el lema siguente:

**Lemma 4.1.** *Sea $\gamma$ una curva cerrada difrenciable del plano complejo, que no pase por el punto $p \in \mathbb{C}$ entonces el valor de la integral:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-p}$$

*es un número entero.*

**Demostración:** Supongamos que la curva:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

este dada por $z(t)$ con $t \in [a,b]$.

La función

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{z^{'}(t)}{z(t)-p} dt$$

esta bien definida y es continua en el intervalo $[a,b]$ y se tiene:

$$\varphi^{'}(t) = \frac{z^{'}(t)}{z(t)-p}$$

Consideramos la función:

$$\phi(t) = e^{-\varphi(t)}(z(t)-p)$$

tenemos:

$$\phi^{'}(t) = -e^{-\varphi(t)}\varphi^{'}(t)(z(t)-p) + e^{-\varphi(t)}z^{'}(t) = 0$$

se tiene que $\phi(t) = k$ con $k$ una constante:

$$k = e^{-\varphi(a)}(z(a) - p) = (z(a) - p)$$

de allí se obtiene que:

$$e^{\varphi(t)} = \frac{z(t) - p}{z(a) - p}$$

como la curva es cerrada tendremos:

$$e^{\varphi(b)} = 1$$

de donde finalmente:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - p} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{z^{'}(t)}{z(t) - p}dt = k$$

□

Podemos dar la siguente definición:

**Definition 6.** *Sea $\gamma$ una curva cerrada del plano complejo y $p \in \mathbb{C}$, le llamaremos el índice del punto $p$ con respecto a la curva $\gamma$ y lo denotaremos por $I(\gamma, p)$ al número entero determinado por la integral:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - p}$$

Se tienen entonces varias propiedades para el índice:

(1) $I(-\gamma, p) = -I(\gamma, p)$
Si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son dos curvas diferenciables, cerradas y teniendo el mismo punto inicial, entonces:
(2) $I(\gamma_1 + \gamma_2, p) = I(\gamma_1, p) + I(\gamma_2, p)$ si $p$ no pertenece a ninguna de las curvas.
Como consecuencia del teorema de Cauchy para el disco, se tiene:
(3) Si la curva $\gamma$ yace en el interior de un circulo, entonces $I(\gamma, p) = 0$ para todos los puntos $p$ que estan fuera de ese circulo.

**Ejercicios 4.1.** *Sean $\gamma_1$ y $\gamma_2$ dos curvas diferenciables, cerradas en $\mathbb{C} - \{p\}$ homotópicas y $p$ no pertenece a ninguna de ellas. Demuestre que $I(\gamma_1, p) = I(\gamma_2, p)$.*

## 5. Representación Integral y consecuencias

En este capítulo comenzaremos demostrando que los valores de una función holomorfa pueden representarse como los valores de la integral de una cierta funcion sobre una cierta curva.

## 6. Fórmula de representación integral

Estando aburridos del uso de la variable $z$, utilizaremos la variable zeta griega $\zeta$. Sea $D = D(\zeta_0, r)$ un disco circular abierto de radio $r$ y de centro $\zeta_0$, $f(\zeta)$ una función holomorfa en el disco $D$, $p \in D$ y $\gamma$ una curva cerrada diferenciable contenida en $D$, no pasando por $p$.

Consideremos la función:

$$\phi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(p)}{\zeta - p}$$

esta función es holomorfa excepto para $\zeta \neq p$, sin embargo como:

$$\lim_{\zeta \mapsto p} (\phi(\zeta)(\zeta - p)) = \lim_{\zeta \mapsto p} (f(\zeta) - p) = 0$$

podemos aplicar uno de los teoremas de Cauchy anteriores, tendremos:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(p)}{\zeta - p} d\zeta = 0$$

lo que también puede escribirse como:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta = f(p) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - p}$$

recordando la definición del índice de un punto respecto a una curva, tenemos el siguente teorema:

**Theorem 6.1.** *Supongamos que $f(\zeta)$ es una función holomorfa en el disco $D$ y $\gamma$ una curva cerrada diferenciable contenida en $D$. Para cualquier punto $p$ que no este en $\gamma$ se tiene:*

$$I(\gamma, p) f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$

Si suponemos que el índice del punto $p$ respecto a la curva $\gamma$ es 1, tenemos que podemos representar el valor de la función holomorfa $f(\zeta)$ en el punto $p$ mediante la integral:

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$

si consideramos valores de $p$ de manera que su índice permanezca constante e igual a 1 y tratamos a $p$ como variable $z$, tendremos la famosa fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

lo que vale la pena consignar como teorema:

**Theorem 6.2** (Representación integral)**.** *Sea $f(\zeta)$ una función holomorfa en el disco $D$ y $\gamma$ una curva cerrada diferenciable contenida en $D$. Para cualquier punto $p$ que no este en $\gamma$ y cuyo indice sea* 1 *se tiene:*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$

A modo de ejemplo el lector puede calcular las siguentes integrales:

**Ejercicios 6.1.** *Sea $C$ un círculo de centro* $(0,0)$ *y radio* 1 *y $n \in \mathbb{N}$, determine el valor de las siguentes integrales:*

$$\int_C \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz \qquad \int_C \frac{\sin z}{z} dz$$

De esta fórmula integral se pueden obtener varios resultados importantes, los que comenzaremos a deducir.

Como aplicación inmediata se tiene el siguente ejemplo:

**Example 6.1.** *Sea $f(\zeta)$ es una función holomorfa en una vecindad de un disco cerrado $D$ y $C$ el borde del disco recorrido en el sentido contrario de las manecillas de los relojes antiguos, entonces se tiene.*

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta = 2\pi i$$

*si el punto $p$ es interior al disco $D$ y*

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta = 0$$

*si el punto $p$ es exterior al disco $D$.*

Sea $\Omega$ un dominio del plano complejo, $f(z)$ una función analítica que tenga $m$ ceros simples $a_1, a_2, ..., a_m$ en el dominio, sabemos entonces que podemos escribir:

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_m) g(z)$$

con $g(z)$ analítica y $g(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. Tendremos:

$$\frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + ... + \frac{1}{z - a_m} + \frac{g^{'}(z)}{g(z)}$$

sea $\gamma$ una curva diferenciable a pedazos cerrada y que no pase por ninguno de los puntos $a_1, a_2, ..., a_m$, como :

$$\frac{f^{'}(z)}{f(z)} \qquad \frac{g^{'}(z)}{g(z)}$$

son holomorfas en $\Omega$ menos los puntos $a_1, a_2, ..., a_m$ y $\Omega$ respectivamente, se tiene:

$$\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{1}{z - a_1} dz + \int_\gamma \frac{1}{z - a_2} dz + ... + \int_\gamma \frac{1}{z - a_m} dz + \int_\gamma \frac{g^{'}(z)}{g(z)} dz$$

entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = \sum_1^m \mathrm{Ind}(\gamma, a_k)$$

Proponemos un ejercicio al lector:

**Ejercicios 6.2.** *Considere el dominio $\Omega$ no simplemente connexo, acotado por las circunferencias $C_1$ de centro $(0,0)$ y radio $R$, $C_2$ de centro $(0,0)$ y radio $r$ con $r < R$, como en la figura virtual. Demuestre que para cada $z_0 \in \Omega$ se tiene:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*generalize al caso en que dentro de $C_1$ hayan $k$ circunferencias $C_i$.*

Sea $f(z)$ una función holomorfa en un dominio simplemente connexo $\Omega$ del plano complejo, $z_0 \in \Omega$, consideremos un círculo $C$ de radio $r$ centrado en $z_0$, como cada $z \in C$ se expresa como $z = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ la fórmula integral de Cauchy se expresa como:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

y obtenemos el resultado conocido como el teorema del valor medio de Gauss, que en términos coloquiales expresa que el valor que toma $f(z)$ en el centro del círculo es el promedio de los valores que toma a lo largo de su circunferencia.

## 7. Holomorfía implica analiticidad

Como el alumno lector recordará (si no ha recetado, después de la primera prueba), habiamos visto que una función analítica compleja era holomorfa, ahora mediante la fórmula integral de Cauchy demostraremos que una función holomorfa es analítica compleja.

Supongamos que $f(z)$ es una función holomorfa en un disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C}/ \mid z \mid < R\}$, debemos probar que existe una serie entera:

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

cuyo radio de convergencia sea mayor o igual que $R$ y cuya suma $S(z)$ sea igual a $f(z)$ para los $z$ con $\mid z \mid < R$.

De manera precisa, se puede demostrar:

**Theorem 7.1.** *Sea $f(z)$ es una función holomorfa en un disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C}/ \mid z \mid < R\}$, entonces $f$ es desarrollable en serie entera en el disco $D$.*

**Demostración:** Sea $r < R$, existe un $r_0$ tal que $r < r_0 < R$, consideremos el circulo $C$ de centro $z = (0,0)$ y radio $r_0$, sabemos entonces que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

para cada $z$ tal que $\mid z \mid \leq r$.

La función $\frac{1}{\zeta - z}$ puede desarrollarse en serie de potencias, ya que $\mid z \mid < \mid \zeta \mid$ tendremos:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}(1 + \frac{z}{\zeta} + \frac{z^2}{\zeta^2} + ... + \frac{z^n}{\zeta^n} + ....)$$

entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\sum_{n\geq 0} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}})d\zeta$$

la serie:

$$\sum_{n\geq 0} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$$

converge normalmente para $\mid z \mid \leq R$ y $\mid \zeta \mid = r_0$, podemos integrar término a término y:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

con los coeficientes dados por.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

entonces hemos encontrado una serie entera convergente para $\mid z \mid \leq r$ cuya suma es $f(z)$, por el principio del prolongamiento analítico ella es analítica en todo $D$. □

De aquí en adelante podemos usar como sinónimos holomorfía y analiticidad.

El teorema anterior vale tambien en un disco centrado en un punto $z_0$ del plano complejo, más precisamente.

**Theorem 7.2** (bis)**.** *Sea $f(z)$ es una función holomorfa en un disco abierto $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}/ \mid z - z_0 \mid < R\}$, entonces $f$ es desarrollable en serie entera en el disco $D(z_0, R)$. Más precisamente:*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$$

*con los coeficientes dados por.*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

El lector probablemente ya conoce, que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua. Aprovechemos de demostrar el analogo vale para funciones holomorfas.

**Theorem 7.3** (Weierstrass)**.** *Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $\Omega$, de manera que convergen uniformemente hacia una función $f(z)$, en cada compacto de $\Omega$, entonces $f$ es una función holomorfa.*

**Demostración:** Sea $z \in \Omega$ y $\gamma$ un círculo que rodee a $z$ y contenido en $\Omega$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$$

ya que la convergencia de las $f_n(z)$ es uniforme en $\gamma$, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon$ con

$$\mid f_n(z) - f(z) \mid < \epsilon \qquad n \leq n_\epsilon$$

ahora acotemos:

$$\mid \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \mid$$

se tiene:

$$\mid \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \mid \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\mid f_n(\zeta) - f(z) \mid}{(\mid \zeta - z) \mid} \mid d\zeta \mid \leq \frac{\epsilon L}{2\pi d}$$

donde $L$ es el largo de la curva $\gamma$ y $d$ es la distancia más corta desde $z$ a $\gamma$.

El límite de las $f_n(z)$ es entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$$

y como el límite es único, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

y $f(z)$ es una función analítica y entonces holomorfa. □

El lector puede verificar que:

$$\lim_{n \mapsto \infty} f_n^{'}(z) = f^{'}(z)$$

El teorema anterior habitualmente se utiliza para series de funciones holomorfas, lo enunciamos a continuación bajo esa forma:

**Theorem 7.4** (Weierstrass). *Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones holomorfas en un dominio $\Omega$, de manera que la serie:*

$$\sum_{n \leq 0} f_n(z)$$

*converge uniformemente en cada compacto de $\Omega$, entonces su suma $f(z)$ es una función holomorfa. Su derivada puede ser calculada derivando término a termino.*

Terminaremos esta sección, haciendo una observación, dirigida a los alumnos que esten familiarizados con los rudimentos del Análisis.

Sea $\Omega$ un abierto del plano complejo, $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ el espacio de las funciones continuas de $\Omega$ a valores en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ el espacio de las funciones holomorfas de $\Omega$ a valores en $\mathbb{C}$, claramente ya sabiamos que:

$$\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$$

como la suma de funciones holomorfas es holomorfa, y una función holomorfa multiplicada por un escalar es también holomorfa, $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ es un subespacio de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$.

El primer teorema de Weierstrass, nos garantiza que es un subespacio cerrado, como $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ es completo, el lector puede deducir que $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ es también completo.

## 8. Desigualdades de Cauchy y aplicaciones

Sea $f(z)$ una función holomorfa o analítica en un abierto $D$ del plano complejo, ahora ya sabemos que para cada $z_0 \in D$ existe un disco $D(z_0, r)$ donde se tiene:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

para cada $\mid z - z_0 \mid < r$ y los coeficientes estan dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

con $C$ un círculo de centro $z_0$ y radio $r$ de donde se deduce:

$$\mid a_n \mid \leq \frac{1}{2\pi i} \int_C \mid \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \mid$$

denotemos por $M(r)$ el valor máximo alcanzado por $\mid f(\zeta) \mid$ con $\zeta \in C$, obtenemos que:

$$\mid a_n \mid \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

las que son conocidas como desigualdades de Cauchy.

De las desigualdades de Cauchy se puede obtener el teorema de Liouville.

**Theorem 8.1** (Liouville). *Sea $f(z)$ una función holomorfa y acotada en todo el plano complejo, entonces la función es constante.*

**Demostración:** Como $f(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo entonces se tiene de las desigualdades de Cauchy:

$$| a_n | \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

donde $r$ es el radio de un círculo arbitrario del plano, como $f(z)$ es acotada:

$$| a_n | \leq \frac{M}{r^n}$$

con $M$ una constante que no depende de $r$ y como

$$\frac{M}{r^n} \to 0$$

si $n \geq 1$ y $r$ es arbitrariamente grande tenemos entonces que $a_n = 0$ para $n \geq 1$. □

Recordemos que a una función holomorfa o analítica en todo en plano complejo $\mathbb{C}$, se le llama una función entera. Se puede enunciar el teorema de Liouville, diciendo, que una función entera y acotada es constante.

Como consecuencia de lo anterior, se puede obtener una demostración del teorema fundamental del Algebra, llamado también teorema de D'Alembert.

**Theorem 8.2** (D'Alembert). *Cada polinomio con coeficientes complejos y no constante $P(z)$ tiene una raíz compleja.*

**Demostración:** Supongamos que $P(z)$ no se anula para ningun $z \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es holomorfa en todo el plano complejo. Como $P(z)$ tiende al infinito cuando $| z |$ tiende al infinito: $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es acotada fuera de un disco de radio $R$, siendo el disco un compacto de $\mathbb{C}$ (cerrado y acotado) y $f(z)$ una función continua, tendremos que $f(z)$ es acotada en todo $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville $f(z)$ es constante. □

También, de manera parecida a la demostración anterior el alumno lector puede adiestrarse, demostrando el siguente teorema:

**Theorem 8.3.** *Sea $f(z)$ una función entera, $M(r) = max\{| f(z) | / | z |= r\}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\lim_{r \mapsto \infty} \frac{M(r)}{r^m} = 0$$

*entonces $f(z)$ es un polinomio de grado $d \leq m$:*

Aprovechemos de proponer como ejercicio,al lector, otra aplicación del teorema de Liouville.

**Ejercicios 8.1.** *Sean $w_1$, $w_2$ dos complejos que sean $\mathbb{R}$-linealmente independientes, diremos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es doblemente períodica, con períodos $w_1$ y $w_2$ si $f(z + w_1) = f(z)$ y $f(z + w_2) = f(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ :*

(1) *Demuestre que $L\{z \in \mathbb{C}/z = mw_1 + nw_2, m, n \in \mathbb{Z}\}$ con la operación $+$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.*
(2) *Demuestre que el subconjunto $L$ es discreto en $\mathbb{C}$.*

(3) *Demuestre que si $f(z)$ es es doblemente periódica, con períodos $w_1$ y $w_2$ entonces $f(z+l) = f(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y $l \in L$.*
(4) *Demuestre que si $f(z)$ es es doblemente periódica, con períodos $w_1$ y $w_2$ entonces $f(z)$ es acotada en $\mathbb{C}$.*
(5) *Demuestre que aparte de las constantes, no existen funciones doblemente periodicas en $\mathbb{C}$.*

Ahora demostraremos otra importante aplicación, conocida como el principio del módulo máximo.

**Theorem 8.4.** *Sea $f(z)$ una función holomorfa en un dominio $\Omega$ del plano complejo, si $\mid f(z) \mid$ alcanza su valor máximo en un punto $a \in \Omega$ entonces $f(z)$ es constante en $\Omega$.*

**Demostración:** Supongamos que $\mid f(z) \mid$ alcanza su valor máximo, que denotaremos por $M$ en un punto $a \in \Omega$, es decir, $\mid f(a) \mid = M$. Sea $R$ la más corta distancia de $a$ a la frontera de $\Omega$, consideramos $0 < r < R$:

$$0 = \mid f(a) \mid -M = \mid \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta \mid -M$$

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(a+re^{i\theta}) \mid d\theta - M \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M d\theta - M = 0$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(a+re^{i\theta}) \mid d\theta - M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mid f(a+re^{i\theta}) \mid -M) d\theta$$

también tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (M- \mid f(a+re^{i\theta}) \mid) d\theta = 0$$

la función:

$$g(\theta) = M- \mid f(a+re^{i\theta}) \mid$$

es continua y mayor o igual que 0, de MAT I, sabemos entonces que como su integral entre 0 y $2\pi$ es nula, entonces:

$$\mid f(a+re^{i\theta}) \mid = M$$

en el círculo $\mid z-a \mid = r$, como $r$ se puede elejir arbitrariamente en el intervalo $0 < r < R$, $\mid f(z) \mid = M$ en el disco $D(a,R)$, pero por un ejercicio anterior, si $f(z)$ es holomorfa y $\mid f(z) \mid$ es constante, entonces $f(z)$ es constante en $D(a,R)$, como ella es analítica, por el prolongamiento analítico es constante en todo el dominio $\Omega$. □

El lector avezado, notará que más que la holomorfía de $f(z)$, hemos usado fuertemente el hecho que posea la propiedad del promedio y sea continua, a el, le invitamos a demostrar a modo de ejercicio la siguente proposición:

**Proposition 8.1.** *Sea $f(z)$ una función continua en un abierto $U$ del plano complejo. Si $f(z)$ posee la propiedad del promedio y si $\mid f(z) \mid$ alcanza un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$ entonces $f(z)$ es constante en una vecindad de $a$ en $U$.*

Una variante o corolario del principio del máximo es la siguente:

**Corollary 8.1.** *Sea $\Omega$ un abierto acotado y connexo del plano complejo. Sea $f(z)$ una función continua en $\overline{\Omega}$ que posea la propiedad del promedio en $\Omega$; sea $M$ la cota superior de $\mid f(z) \mid$ cuando $z$ recorre la frontera de $\Omega$, entonces:*

(1) $\mid f(z) \mid \leq M$ *para* $z \in \Omega$.
(2) *Si* $\mid f(a) \mid = M$ *en un punto* $a \in \Omega$, *entonces* $f(z)$ *es constante:*

**Demostración:** Denotemos por $N$ la cota superior de $\mid f(z) \mid$ para $z \in \overline{\Omega}$, cota que se alcanza en algun punto de $\overline{\Omega}$, ya que el es compacto y $\mid f(z) \mid$ es continua. Si $a \in \Omega$ y $f(a) = N$, de la demostración del principio del máximo se infiere que $f$ es constante en una vecindad de $a$, entonces el conjunto de puntos donde $f$ toma el valor constante $N$ es abierto, por otra parte el es cerrado, ya que $f$ es continua y la imagen inversa de un cerrado es cerrado. Como $\Omega$ es connexo $f$ toma el valor $N$ en cada punto de $\Omega$ y por continuidad de $f$, ella toma el valor $N$ también en los puntos de acumulación de $\Omega$ es decir $N = M$ y tenemos 1 y 2.

Si uno considera una función $f$, holomorfa en el interior de un disco y continua en el disco cerrado, la cota superior de $\mid f \mid$ se alcanza en el borde del disco y ella acota también a los valores de $\mid f \mid$ en el interior del disco. Asi por ejemplo en las desigualdades de Cauchy, la cota $M(r)$ no acota solamente a $\mid f(z) \mid$, para $\mid z \mid = r$, si no que también para $\mid z \mid < r$.

Como aplicación del principio del máximo, se puede demostrar otro teorema clásico, llamado el lema (no teorema) de Schwarz.

Denotaremos por $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / \mid z \mid < 1\}$ al disco unitario.

**Theorem 8.5** (Schwarz). *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y tal que $f(0) = 0$,entonces:*

(1) *Se tiene* $\mid f(z) \mid \leq \mid z \mid$.
(2) *Si para algun* $z_0 \neq 0$ *se tiene la igualdad* $\mid f(z_0) \mid = \mid z_0 \mid$ *entonces* $f(z) = \lambda z$ *para cada* $z \in \mathbb{D}$ *con* $\mid \lambda \mid = 1$.

**Demostración:** Ya que $f(0) = 0$ y $f$ es analítica:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$$

la función $\phi(z) = \frac{f(z)}{z}$ es holomorfa, consideremos un punto $a \in \mathbb{D}$ y elijamos $r$ tal que: $\mid z \mid < r < 1$, para los puntos del círculo $\mid z \mid = r$ se tiene:

$$\mid \phi(z) \mid = \frac{\mid f(z) \mid}{\mid z \mid} \leq \frac{1}{r}$$

por el principio del máximo, este acotamiento vale para los puntos interiores del círculo $\mid z \mid = r$ y

$$\mid \phi(z) \mid = \frac{\mid f(z) \mid}{\mid z \mid} \leq \frac{1}{r}$$

para $\mid z \mid \leq r$ haciendo tender $r$ hacia 1 se tiene la aserción 1.

Si para algun $z_0 \neq 0$ en el interior del disco, se tiene la igualdad $\mid \phi(z_0) \mid = \mid z_0 \mid$, por el principio del máximo, la función $\phi(z)$ es constante, de donde $f(z) = \lambda z$ para una constante compleja $\lambda$, cuyo módulo debe ser 1 y se tiene la afirmación 2. $\square$

**Ejercicios 8.2.** *Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / \mid z \mid < 1\}$ el disco unitario, $a \in \mathbb{C}$ tal que $\mid a \mid < 1$ considere la homografia:*

$$\Phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}$$

(1) *Demuestre que* $\Phi_a$ *es holomorfa en un disco abierto que contiene a la cerradura de* $\mathbb{D}$.
(2) *Demuestre que:*

$$\Phi_a \circ \Phi_{-a} = \Phi_{-a} \circ \Phi_a = Id$$

(3) *Demuestre que* $\Phi_a$ *es una aplicación holomorfa inyectiva del disco unitario en si mismo.*
(4) *Demuestre que* $\Phi_a(S^1) = S^1$.

## 9. Series de Laurent

Consideraremos series enteras formales, es decir expresiones del tipo:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$$

donde la suma formal se realiza sobre todos los enteros, positivos y negativos.

A una serie formal de este tipo, le podemos asociar dos series formales:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \qquad \sum_{n<0} a_n x^{-n}$$

supongamos que $r_1$ y $\frac{1}{r_2}$ sean los radios de convergencia de ellas, tendremos dos series convergentes:

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad \mid z \mid< r_1$$

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n \qquad \mid z \mid> r_2$$

La función $f_2$ es analitítica entonces holomorfa en $z$, si remplazamos $z = \frac{1}{u}$ tendremos la función:

$$g : u \to \frac{1}{u} \to f_2(\frac{1}{u})$$

es holomorfa, más precisamente:

$$g(u) = \sum_{n>0} a_{-n} n u^n$$

es holomorfa para $\mid u \mid< \frac{1}{r_2}$ podemos derivarla y de acuerdo a la regla de la cadena tendremos:

$$f_2^{'}(z) = -\frac{1}{z^2} g^{'}(\frac{1}{z}) = \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}$$

entonces la serie:

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$$

es derivable término a término para $\mid z \mid> r_2$, supondremos que $r_2 < r_1$, sin excluir los casos $r_2 = 0$, $r_1 = \infty$.

Tendremos que la suma $f(z)$ de la serie:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

es holomorfa en la corona circular: $r_2 <\mid z \mid< r_1$ y su derivada $f^{'}(z)$ es la suma de la serie:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

La serie:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

recibe el nombre de **serie de Laurent** en la corona $r_2 <\mid z \mid< r_1$.

Vale la pena, sealar que dada:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$$

y $z_0 \in \mathbb{C}$, podemos considerar, las series convergentes asociadas

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n \qquad \mid z - z_0 \mid< r_1 \\ f_2(z) &= \sum_{n<0} a_n (z - z_0)^n \qquad \mid z - z_0 \mid> r_2 \end{aligned}$$

y razonando de manera similar al caso $z_0 = 0$, obtendremos una serie de Laurent:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en la corona $r_2 <\mid z - z_0 \mid< r_1$.

Si $r_2 < \rho_2 < \rho_1 < r_1$, la serie de Laurent converge absolutamente en la corona: $\rho_2 \leq\mid z - z_0 \mid\leq \rho_1$.

**Definition 7.** *Diremos que una función $f(z)$ definida en una corona:*

$$r_2 <\mid z \mid< r_1$$

*es desarrollable en serie de Laurent en la corona, si existe una serie de Laurent:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

*que converga en esta corona cuya suma sea $f(z)$ para cada $z$ de la corona.*

La pregunta evidente que uno se puede hacer es la siguente: Si $f(z)$ es una función holomorfa en una corona, será $f(z)$ desarrollable en serie de Laurent ?.

Ya demostraremos que la respuesta es sí, primero demostraremos que si $f(z)$ desarrollable en serie de Laurent, entonces los coeficientes de la serie estan unicamente determinados, la demostración de esta aserción, nos permitirá revisar nuestros conocimientos de MAT III.

**Proposition 9.1.** *Supongamos que una función $f(z)$ definida en una corona:*

$$r_1 <\mid z \mid< r_2$$

*es desarrollable en serie de Laurent*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

*en la corona, entonces los coeficientes $a_n$ estan unicamente determinados.*

**Demostración:** Supongamos que una función $f(z)$ definida en una corona:

$$r_1 <\mid z \mid< r_2$$

es desarrollable en serie de Laurent

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

en la corona, la serie converge absolutamente en cada corona cerrada

$$\rho_2 \leq\mid z \mid\leq \rho_1$$

con $r_2 < \rho_2 < \rho_1 < r_1$ para $r$ fijo y tal que $r_2 < r < r_1$ consideramos $z = re^{i\theta}$:

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

ella es una serie de Fourier en la variable real $\theta$, del curso de MAT III, tendremos que el coeficiente $c_n = a_n r^n$ de ella es igual a:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta$$

entonces dada $f(z)$ los coeficientes estan unicamente determinados por la relación anterior. □

Ahora demostraremos la existencia:

**Theorem 9.1.** *Cada función $f(z)$ holomorfa definida en una corona:*

$$r_2 <\mid z \mid< r_1$$

*es desarrollable en serie de Laurent*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

*en esta corona.*

**Demostración:** Dados $\rho_1$ y $\rho_2$ satisfaciendo:$r_2 < \rho_2 < \rho_1 < r_1$ mostraremos que existe una serie de Laurent que converge absolutamente en la corona

$$\rho_2 \leq\mid z \mid\leq \rho_1$$

y cuya suma es igual a $f(z)$.

Elejimos como en la figura virtual, dos círculos de radios $\rho$ y $R$ con $\rho_2 < \rho < R < \rho_1$, también dos puntos $z_2 \in C_R$ y $z_1 \in C_\rho$, denotamos como en la figura por $\Gamma$ el camino cerrado construido como: ir de $z_2$ a $z_1$ continuar con $C_\rho$ en el sentido contrario de la orientación, ir de $z_1$ a $z_2$ y finalmente seguir $C_R$.

Para cada $z$ en la corona $\rho \leq\mid z \mid\leq R$ ,y ya que $f(z)$ es holomorfa por el teorema de Cauchy tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

en la primera integral como $\mid \zeta \mid= R$ se tiene el desarrollo en serie:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

la que converge normalmente cuando $\zeta$ se mueve en el círculo de radio $R$, remplazando en la primera integral e integrando término a término se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

en donde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta \qquad n \geq 0$$

Para la segunda integral consideramos:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n<0}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

ya que $\mid \zeta \mid = \rho$, remplazamos en ella e integramos término a término, ya que la convergencia es normal:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n<0} a_n z^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta \qquad n < 0$$

finalmente para la función $f(z)$ tendremos:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

en la corona $\rho \leq\mid z \mid\leq R$. □

El lector podrá observar que el término $a_{-1}$ es bastante especial, en efecto:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(\zeta)d\zeta$$

En el teorema anterior hemos considerado el caso, de una corona centrada en $(0,0)$, el teorema es válido en una corona centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$.

**Theorem 9.2.** *Cada función $f(z)$ holomorfa definida en una corona:*

$$r_2 <\mid z - z_0 \mid< r_1$$

*es desarrollable en serie de Laurent*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*en esta corona.*

## 10. Prolongamiento analítico

Consideraremos ciertas coronas especiales, $r_2 = 0$ y $r_1 = r$ a las que llamaremos discos despuntados:

$$0 <\mid z - z_0 \mid< r, \qquad 0 <\mid z \mid< r$$

son discos despuntados centrados en $z_0$ y $z = 0$ respectivamente.

Dada una función $f(z)$ holomorfa o analítica en un disco despuntado, queremos estudiar la posibilidad de extender $f(z)$ a una función analítica en el disco. Solamente para efectos de simplificación, consideraremos discos despuntados centrados en $z = 0$.

**Proposition 10.1.** *Sea $f(z)$ una función analítica en un disco despuntado $0 <\mid z \mid< r$, ella se puede extender a una función analítica en todo el disco si y solamente si $f(z)$ es acotada en una vecindad de $z = 0$.*

**Demostración:** Sea $f(z)$ una función holomorfa o analítica en un disco despuntado $0 <\mid z \mid< r$, $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de Laurent

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

supongamos que existe $M$ que acota $\mid f(z) \mid$ para $\mid z \mid= r$ con $r$ pequeo. De la desigualdad de Cauchy se tiene:

$$\mid a_n \mid\leq \frac{M}{r^n}$$

si $n < 0$ y $r$ arbitrariamente pequeo, tendremos que $\mid a_n \mid= 0$ para $n < 0$ y entonces el prolongamiento coincide con el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$. Evidentemente si $f(z)$ se prolonga ella debe ser acotada en una vecindad de $z = 0$. □

Lo anterior motiva la definición siguente

**Definition 8.** *Sea $f(z)$ una función analítica en un disco despuntado $0 <\mid z \mid< r$, diremos que $z = 0$ es un punto singular aislado si $f(z)$ no puede extenderse a una función analítica en todo el disco.*

Reconstruir la proposición anterior y esta definición para discos despuntados centrados en $z_0$, es un ejercicio planteado al alumno lector.

Sea $f(z)$ una función analítica en un disco despuntado $0 <\mid z \mid< r$, claramente una condición necesaria y suficiente para que $z = 0$ sea un punto singular aislado es que no todos los coeficientes con indice negativo en el desarrollo en serie de Laurent:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

sean nulos, ello lleva a considerar dos casos.

(1) Para $n < 0$ se tiene solamente una cantidad finita de $a_n \neq 0$, en este caso podemos elejir el natural $k$ más grande tal que $a_n = 0$ para $n < k$ y

$$g(z) = z^k f(z)$$

es una función holomorfa en una vecindad del origen. En este caso

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^k}$$

(2) Para $n < 0$ se tiene una cantidad no finita de $a_n \neq 0$, en este caso diremos que $z = 0$ es un punto singular esencial de $f(z)$.

**Example 10.1.** *La función*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

*tiene un punto singular esencial en el origen $z = 0$:*

**Ejercicios 10.1.** *Determine el tipo de singularidad que tienen en $z = 0$ las siguentes funciones:*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad g(z) = \frac{log(1+z)}{z^2} \qquad h(z) = z \sin(\frac{1}{z})$$

El comportamiento de una función analítica en una vecindad de un punto singular esencial es bastante especial, al respecto se tiene el resultado siguente

**Theorem 10.1** (Casaroti Weierstrass). *Sea $f(z)$ una función analítica en un disco despuntado $0 <\mid z \mid< r$ y $z = 0$ un punto singular esencial. Entonces para cada $\epsilon < 0$ la imagen del disco despuntado $0 <\mid z \mid< \epsilon$ por la función $f$ es un subconjunto denso del plano complejo $\mathbb{C}$.*

**Demostración:** Supongamos que el subconjunto:

$$f(\{z \in \mathbb{C}/0 <\mid z \mid< \epsilon\})$$

no sea denso, existe un disco abierto $D(a, \rho)$ de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $\rho > 0$ de manera que:

$$\mid f(z) - a \mid \geq \rho$$

para $0 <\mid z \mid< \epsilon$.

La función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

es analítica en el disco despuntado $0 <\mid z \mid< r$ y además acotada y entonces $g(z)$ se prolonga en una función analítica en todo el disco $0 <\mid z \mid< \epsilon$, si consideramos

$$f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$$

ella sería meromorfa en $z = 0$ lo es una contradicción, ya que $z = 0$ era un punto singular esencial. $\square$

Aprovecharemos de mencionar, sin demostración un teorema de Emile Picard, que precisa aún más el comportamiento en un punto singular esencial:

**Theorem 10.2** (Picard). *Si $z = 0$ es un punto singular esencial de una función holomorfa $f(z)$, entonces la imagen por $f$ de cualquier disco despuntado $0 <\mid z \mid< \epsilon$ es el plano complejo entero o el plano complejo privado de un punto.*

**Ejercicios 10.2.** *Demuestre que la función*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

*toma todo valor distinto de 0 en cada disco despuntado $0 <\mid z \mid< \epsilon$.*

Ahora retomaremos con mayor detalle, las singularidades del tipo 1.

Sea $f(z)$ una función holomorfa en un disco despuntado $0 <\mid z - z_0 \mid< \rho$, sabemos que en cada punto $z$ del disco despuntado consideraremos su desarrollo de Laurent:

$$... + \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + ... + \frac{a_1}{(z - z_0)^1} + a_0 + a_1(z - z_0)^1 + ... + a_l(z - z_0)^l + ...$$

Si $r < \rho$, denotaremos por $M_r = \text{Max}\{\mid f(z) \mid / \mid z - z_0 \mid\}$, asumimos que $f(z)$ crece más lentamente que cierta potencia de $\frac{1}{|z-z_0|}$ cuando $z$ tiende a $z_0$, más precisamente:

$$M_r \mid z - z_0 \mid^{n+1} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad r = \mid z - z_0 \mid \to 0$$

de la desigualdad de Cauchy: $\mid a_{-m} \mid \leq M_r r^m$ ahora si $m \geq n+1$ entonces:

$$\lim_{r \mapsto 0} M_r r^m = 0$$

los coeficientes $a_m$ no dependen de $r$, $a_{-n-1} = a_{-n-2} = .... = 0$ y obtenemos que:

$$f(z) = \frac{a_n}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{a_1}{(z-z_0)^1} + a_0 + a_1(z-z_0)^1 + ... + a_l(z-z_0)^l + ...$$

se puede notar que en este desarrollo le Laurent hay solamente una cantidad finita de términos que tienden a $\infty$ (polo norte de la esfera) cuando $z \to 0$.

Tendremos que si $a_{-n} \neq 0$

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z)(z-z_0)^n = a_{-n}$$

la función $g(z) = f(z)(z-z_0)^n$ es holomorfa, diremos en este caso que $z_0$ es un polo de orden $n$ de la función $f(z)$. El término:

$$\frac{a_n}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{a_1}{(z-z_0)^1}$$

se llama la parte singular de $f(z)$ en el polo $z = z_0$.

**Definition 9.** *Sea $\Omega$ un dominio del plano complejo si $f(z)$ es holomorfa en $\Omega$ excepto en polos, diremos que $f(z)$ es una función meromorfa, denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas en $\Omega$*

De la definición tendremos que para cada $a \in \Omega$ existe un disco abierto $\mid z - a \mid < \rho$ contenido en $\Omega$ tal que $f(z)$ es holomorfa en ese disco o $f(z)$ es holomorfa en el disco despuntado $0 < \mid z - a \mid < \rho$ y el punto $a$ es un polo de la función.

**Ejercicios 10.3.** *Verificar que la suma, el producto y el cociente de dos funciones meromorfas es también una función meromorfa.*

Ahora examinaremos el comportamiento en una vecindad de $\infty$.

Sea $f(z)$ una función holomorfa en una corona $R < \mid z \mid < \infty$ examinemos a traves de su serie de Laurent su comportamiento en $z = \infty$. Sea ahora $M_r = \text{Max}\{\mid f(z) \mid / \mid z \mid\}$ y supongamos que exista un entero $n \geq 0$ de manera que:

$$\frac{M_r}{r^{n+1}} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad r = \mid z \mid \to \infty$$

tenemos que

$$\mid a_m \mid \leq \frac{M_r}{r^m}$$

y para $m \geq (n+1)$ y tendremos que el desarrollo de Laurent es:

$$f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z^1 + a_0 + \frac{a_{-1}}{z^1} + \frac{a_{-2}}{z^2} + ...$$

se tiene:

$$\frac{f(z)}{z^n} \to a_n \qquad \text{cuando} \qquad z \to \infty$$

si $a_n \neq 0$ el punto $z = \infty$ es un polo de orden $n$ de la función holomorfa $f(z)$.

Terminaremos esta sección, verificando que la esfera de Riemann tiene una estructura de superficie de Riemann, en la cual podemos examinar el comportamiento del $\infty$ como punto singular aislado.

## 11. Residuos

Sea $\Omega$ una región simplemente connexa del plano complejo y $f(z)$ una función holomorfa en $\Omega$ menos un número finito de puntos singulares. El teorema que sigue, relacionará la integral de $f(z)$ a lo largo de una curva cerrada, contenida en $\Omega$, con los residuos de $f(z)$ en los puntos singulares. Recordemos que si $f(z)$ es una función holomorfa en un disco despuntado: $0 <\mid z - z_0 \mid \delta$, el coeficiente $a_{-1}$ de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z_0$ es el residuo de $f(z)$ en $z_0$, que denotaremos por:

$$a_{-1} = \text{res}(f(z), z_0)$$

además se tenía:

$$a_1 = \text{res}(f(z), z_0) = \int_C f(z)dz$$

donde $C$ es una curva cerrada que rodea a $z_0$. También denotabamos por $\text{Ind}(C, z_0)$ al índice de la curva $C$ con respecto al punto $z_0$.

**Theorem 11.1.** *Sea Sea $\Omega$ una región simplemente connexa del plano complejo y $f(z)$ una función holomorfa en $\Omega$ excepto en los puntos singulares $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ y $\Gamma$ una curva cerrada contenida en $\Omega$ y que no pase por los puntos singulares. Entonces se tiene:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Ind(\Gamma, z_j) res(f(z), z_j)$$

**Demostración:** Expandimos la función $f(z)$ en su serie de Laurent en una vecindad de $z_1$:

$$f(z) = g_1(z) + h_1(z)$$

donde:

$$h_1(z) = a_0 + a_1(z - z_1)^1 + a_2(z - z_1)^2 + ... + a_k(z - z_k)^k + ...$$

es holomorfa en un disco $\mid z - z_1 \mid < \delta_1$ y

$$g_1(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_1)^1} + \frac{a_{-2}}{(z - z_1)^2} + ... + \frac{a_{-k}}{(z - z_1)^k} + ...$$

es holomorfa en $0 <\mid z - z_1 \mid < \delta_1$

De manera similar consideramos los desarrollos en serie de Laurent en cada uno de los puntos restantes $z_j$, $j \in \{2, 3, ..., n\}$:

$$f(z) = g_j(z) + h_j(z)$$

la función.

$$F(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} g_j(z)$$

es holomorfa en todo el dominio $\Omega$, siendo el simplemente connexo, del teorema de Cauchy se tiene:

$$0 = \int_\Gamma F(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} (\int_\Gamma g_j(z)dz)$$

cada serie $g_j(z)$ converge absolutamente en $\Gamma$, entonces uniformente y podemos integrar término a término:

$$\int_\Gamma g_j(z)dz = \int_\Gamma \frac{a_{-1}^j}{(z-z_j)^1}dz + \int_\Gamma \frac{a_{-2}^j}{(z-z_j)^2}dz + ... + \int_\Gamma \frac{a_{-k}^j}{(z-z_j)^k}dz + ...$$

como para cada $m \geq 2$ y cada $j$, se tiene

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-z_j)^m}dz = \frac{1}{1-m}\int_\Gamma d(\frac{1}{z-z_j})^{m-1} = 0$$

tendremos.

$$0 = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} (\int_\Gamma \frac{a_{-1}^j}{z-z_j}dz)$$

y como:

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-z_j}dz = 2\pi i \mathrm{Ind}(\Gamma, z_j)$$

y cada $a_{-1}^j$ es el residuo de de $f(z)$ en $z_j$ se tiene el resultado. □

El teorema anterior tiene dos caras, si se calcula el residuo de una función se obtiene el valor de una integral de línea y si se calcula una integral de línea se obtiene el residuo de una función. Sin embargo, generalmente se utiliza para calcular integrales, ilustraremos con un ejemplo y propondremos un ejercicio. Más adelante volveremos de manera más sitematica sobre el calculo de integrales.

**Example 11.1.** *Queremos calcula la integral siguente:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

*consideramos la función*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

*holomorfa en todo el plano complejo, excepto en los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = -i$.*

*De su desarrollo en series parciales.*

$$f(z) = \frac{1}{2i}(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i})$$

*podemos deducir que su residuo en $z_1 = i$ es $\frac{1}{2i}$, si consideramos un circulo de radio $R > 1$ con centro en el origen y la curva cerrada $\Gamma$ que consiste del segmento real que va desde $-R$ a $R$ y sigue con el semicirculo situado en el semiplano superior, como en la figura virtual, tendremos:*

$$\int_\Gamma \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

*notar que el indice de la curva $\Gamma$ con respecto a $-i$ es nulo.*

*Separamos en dos integrales:*

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2}$$

*para la segunda integral de la derecha, ya que:*

$$| z^2 + 1 | \geq || z^2 | - | 1 ||$$

*se tiene:*

$$| \int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} | \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}$$

*entonces si* $R \to \infty$ *esta integral tiende a* $0$ *y la primera integral tiende a:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

*de donde finalmente se tiene que* $I = \pi$.

**Ejercicios 11.1.** *Demuestre que.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Ahora veremos como calcular el residuo de una función $f(z)$ en un polo multiple:

**Proposition 11.1.** *Supongamos que* $f(z)$ *tiene un polo de orden* $m \geq 1$ *en un punto* $z = a$*, si ponemos* $g(z) = (z-a)^m f(z)$*, entonces:*

$$Res(f(z), a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

**Demostración:**Supongamos que $f(z)$ tenga un polo de orden $m$ en $z = a$:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + ... + \frac{a_{-1}}{(z-a)^1} + a_0 + a_1(z-a)^1 + ... + a_l(z-a)^l + ...$$

con $a_{-m} \neq 0$

$$g(z) = (z-a)^m f(z) = b_0 + b_1(z-a)^1 + b_2(z-a)^2 + ... + b_k(z-a)^k + ....$$

con $a_{-m} = b_0$, $g(a) \neq 0$, si despejamos $f(z)$ tendremos:

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + ... + \frac{b_{m-1}}{(z-a)^1} + \sum_{j=0}^{\infty} b_{m+j}(z-a)^j$$

de donde $\text{Res}(f(z), a) = b_{m-1}$ y del desarrollo de Taylor de $g(z)$ sabemos que:

$$b_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

□

El lector puede verificar que en el caso de un polo simple, es decir $m = 1$, se tiene:

$$\text{Res}(f(z), a) = g(a) = \lim_{z \mapsto a} (z-a) f(z)$$

**Ejercicios 11.2.** *Determine el valor de los residuos en todas las singularidades de:*

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)z^2} \qquad g(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$$

Ahora proponemos al alumno lector, que demuestre como ejercicio el lema siguente.

**Lemma 11.1.** *Sea $f(z)$ una función holomorfa en un dominio simplemente connexo $\Omega$.*

(1) *Suponga que $f(z)$ tenga un cero de orden $m$ en $z = a$, demuestre que:*

$$\frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g^{'}(z)}{g(z)}$$

*con $\frac{g^{'}}{g}$ holomorfa en una vecindad de $z = a$.*

(2) *Suponga que $f(z)$ tenga un polo de orden $m$ en $z = a$, demuestre que:*

$$\frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g^{'}(z)}{g(z)}$$

*con $\frac{g^{'}}{g}$ holomorfa en una vecindad de $z = a$.*

Ahora aplicaremos el teorema del Residuo a la derivada logaritmica de una función meromorfa, con ello obtendremos el clásico principio del argumento:

**Theorem 11.2** (Principio del argumento)**.** *Sea $\Omega$ un dominio simplemente connexo del plano complejo y $f(z)$ una función meromorfa con polos $p_1, p_2, ..., p_k$, con multiplicidades $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ y ceros $z_1, z_2, ..., z_l$ con multiplicidades $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_l$. Si $\Gamma$ es una curva cerrada que no pase ni por los polos , ni por los ceros; entonces:*

$$\int_\Gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (\sum_{j=1}^{l} Ind(\Gamma, z_j)\nu_j - \sum_{j=1}^{k} Ind(\Gamma, p_j)\mu_j)$$

**Demostración:** Sea

$$L(z) = \frac{d(\log(f(z)))}{dz} = \frac{f^{'}(z)}{f(z)}$$

del lemma anterior se tiene: cada cero $z_j$ es un polo simple de $L(z)$ y cada polo $p_j$ es un polo simple de $L(z)$ con residuos dados por:

$$\text{Res}(L(z), z_j) = \nu_j \qquad \text{Res}(L(z), p_j) = -\mu_j$$

Aplicando el teorema de los residuos a la función $L(z)$ tendremos entonces:

$$\int_\Gamma L(z) dz = \int_\Gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (\sum_{j=1}^{l} \text{Ind}(\Gamma, z_j)\nu_j - \sum_{j=1}^{k} \text{Ind}(\Gamma, p_j)\mu_j)$$

□

El lector se puede preguntar sobre el nombre del teorema, al respecto, se puede notar que:

$$\int_\Gamma d(\log(f(z)) = i\Delta_\Gamma \arg(f(z))$$

donde $\Delta_\Gamma \arg(f(z))$ es el incremento del argumento de $f(z)$ a lo largo de la curva $\Gamma$, este incremento es igual al numero de ceros (con multiplicidades) menos el numero de polos (con multiplicidades), multiplicado por $2\pi$. En particular se tiene el siguente corolario.

**Corollary 11.1.** *Si $f(z)$ es una función holomorfa no nula en un dominio simplemente connexo $\Omega$ entonces la variación del argumento de $f(z)$ a lo largo de una curva cerrada $\Gamma$ contenida en $\Omega$ es nula.*

## 12. Aplicaciones

En este capitulo trataremos de estudiar algunas aplicaciones de parte de las nociones previamente estudiadas, comenzaremos con el calculo de algunas integrales, mediante el método de los residuos, despues revisaremos algunas funciones especiales, a continuación calcularemos los automorfismos de algunos dominios y finalmente indicaremos algunas aplicaciones en la fisica y la ingenieria.

## 13. Algunas integrales

Comenzaremos con un tipo de integrales que generaliza nuestra primera aplicacion del teorema del residuo, del capitulo anterior.

Sean $P(z)$ y $Q(z)$ dos polinomios, grad$Q$ − grad$P \geq 2$ y $Q(z)$ no tenga ceros reales, si queremos calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

consideramos la curva cerrada $\Gamma$ que consiste del segmento del eje real que va de $-R$ a $+R$, seguida del semicirculo de centro $(0,0)$ y radio $R$ situado en el semiplano superior (se puede elejir $R$ adecuadamente para que no pase por ningun polo de $Q(z)$), tendremos que la integral:

$$\int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(Q(z), z_j)$$

donde $z_1, z_2, ..., z_n$ son los ceros del polinomio $Q(z)$, tenemos:

$$\int_\Gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{C(R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

donde $C(R)$ es el semicirculo de centro $(0,0)$ y radio $R$ situado en el semiplano superior.

$$\mid \int_{C(R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \mid \leq \pi R \sup\{\mid \frac{P(z)}{Q(z)} \mid / \mid z \mid = R\} \leq \pi \frac{M(R)}{N(R)}$$

como grad$Q$ − grad$P \geq 2$ se tiene.

$$\lim_{R \mapsto \infty} \frac{M(R)}{N(R)} = 0$$

$$\mid \int_{C(R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \mid \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad R \to \infty$$

y entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(Q(z), z_j)$$

**Ejercicios 13.1.** *Como aplicación de lo anterior demuestre que:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{x^{2n}+1} dx = \frac{\pi}{n \sin(\frac{2p+1}{2n})\pi}$$

*donde $n$ y $p$ son enteros positivos con $n > p$.*

Ahora consideraremos integrales del tipo:

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

donde $R$ es una fracción racional. Estas integrales pueden ser calculadas explicitamente, con los metodos de MAT II, sin embargo, ello en general es bastante laborioso.