Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Topología (2007) Problemas complementarios 1.

I. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Una vecindad de A es un subconjunto de X que contiene a un abierto que contenga a A. Si $A = \{x\}$, denotaremos por $\mathcal{V}(x)$ al conjunto que consiste de todas las vecindades de $\{x\}$.

1. Un subconjunto $A \subset X$ es una vecindad de cada uno de sus puntos $\Longleftrightarrow$ A es un abierto.
2. Cada subconjunto de X que contenga a un conjunto que pertenezca a $\mathcal{V}(x)$, pertenece a $\mathcal{V}(x)$.
3. Cada intersección finita de conjuntos de $\mathcal{V}(x)$ pertenece a $\mathcal{V}(x)$.
4. El elemento x está en cada conjunto de $\mathcal{V}(x)$.
5. Si V pertenece a $\mathcal{V}(x)$ entonces hay un conjunto W perteneciendo a $\mathcal{V}(x)$ tal que para cada $y \in W$, V pertenece a $\mathcal{V}(y)$.

II. Una familia $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X es localmente finita si para cada $x \in X$ hay una vecindad V de x tal que $V \cap A_i = \emptyset$ para todo i, excepto un número finito de $i \in I$. Demuestre que la unión de una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X es un cerrado en X.

III. Para $A \subset X$ se definen

$$\alpha(A) = \operatorname{int}(\bar{A}) \qquad \beta(A) = \overline{\operatorname{int}(A)}$$

1. Demuestre que si $A \subset B$, $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ y que $\beta(A) \subset \beta(B)$.
2. Demuestre que si $A \subset X$ es abierto entonces $A \subset \alpha(A)$ y que si $A \subset X$ es cerrado entonces $\beta(A) \subset A$:
3. Demuestre que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ y $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.
4. Si U y V abiertos tales que $U \cap V = \emptyset$ entonces $\alpha(U) \cap \alpha(V) = \emptyset$.

IV. Sea k un cuerpo, $k[x_1, x_2, ..., x_n]$ el anillo de polinomios en n indeterminadas con coeficientes en k y T un subconjunto de $k[x_1, x_2, ..., x_n]$. Se define $Z(T) = \{p \in k^n / f(p) = 0, \forall p \in T\}$.

1. Demuestre que los subconjuntos $Z(T) \subset k^n$ son los cerrados de una topología en k^n, llamada la topología de Zariski.
2. Si $k \cong \mathbb{C}$ y $n = 1$, determine la la topología de Zariski.
3. Si $k \cong \mathbb{C}$, $n = 2$, $T = \{x_1 - x_2\}$ y $U = \mathbb{C}^2 - Z(T)$ determine $\overline{U}$.
4. Si $k \cong \mathbb{C}$, $n = 2$, $T = \{P(x_1, x_2)\}$, P no constante, demuestre que $U = \mathbb{C}^2 - Z(T)$ es infinito y $Z(T)$ es también infinito.

VGA,Agosto 2007