Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Topología (2007) Problemas complementarios 2.

I. Sea (X, τ) un espacio topológico, un conjunto F es un conjunto F_σ si es la unión de a lo más una cantidad numerable de cerrados. Un conjunto G es un conjunto G_δ si es la interseción de a lo más una cantidad numerable de abiertos. Una subfamilia $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama un σ-anillo si $A \in S$ implica $C_X A \in S$ y si $A_i \in S$ para $i = 1, 2, ..., n, ...$ implica $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

1. Dé un ejemplo de un subconjunto $A \subset X$ que sea F_σ y G_δ al mismo tiempo.

2. Si F es un conjunto F_σ y G es un conjunto G_δ demuestre que existen sucesiones crecientes de cerrados y decrecientes de abiertos:
$$F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset ... \subset F$$
$$G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_m \supset ... \supset G$$

3. Demuestre que. la unión numerable y la intersección finita de conjuntos F_σ es F_σ, la intersección numerable y la unión finita de conjuntos G_δ es G_δ, el complemento de un conjunto F_σ es G_σ y el complemento de un conjunto G_δ es F_σ.

4. Demuestre que existe un único σ-anillo minimal $\mathcal{B}$ que contiene a τ, este σ-anillo es llamado la familia de Borel de (X, τ).

5. Considere $X \cong \mathbb{R}^n$ con la topología habitual, demuestre que cada abierto U es un conjunto F_σ y también un conjunto G_δ y que vale lo mismo para cada cerrado F.

6. Caracterice la familia de Borel de $X \cong \mathbb{R}^n$ con la topología habitual.

7. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Demuestre que si $A \subset Y$ es un conjunto F_σ entonces $f^{-1}(A)$ es un conjunto F_σ y que si $B \subset Y$ es un conjunto G_δ entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto G_δ.

II. Considere el espacio H que consiste de las sucesiones (x_n) a valores reales tales que $\| \mathbf{x} \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$, además definimos $< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$. Las vecindades de $\mathbf{x_0} \in H$ en la topología τ_2 son los conjuntos que contienen una bola abierta $\| \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \| < r$ centrada en $\mathbf{x_0}$. Las vecindades de $\mathbf{x_0} \in H$ en la topología τ_1 son los conjuntos conteniendo un conjunto definido por una relación de la forma $\sup_{1 \leq n \leq n} |< \mathbf{x} - \mathbf{x_0}, a_i >| \leq 1$.

Demuestre que la topología τ_2 es estrictamente más fina que la topología τ_1.

VGA,Agosto 2007