Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Topología (2007) Problemas complementarios 3.

I. Sea (X, τ) un espacio topológico, $\mathbb{R}$ con la topología habitual y su estructura de cuerpo ordenado. Consideraremos funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, el objetivo del problema es demostrar algunos resultados clásicos. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice es semi continua superiormente si para cada $b \in \mathbb{R}$ el subconjunto $\{x \in X / f(x) < b\}$ es un abierto de X. Se dice que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice es semi continua inferiormente si para cada $b \in \mathbb{R}$ el subconjunto $\{x \in X / f(x) > b\}$ es un abierto de X.

1. Demuestre que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua $\Leftrightarrow$ es semi continua superior e inferiormente.
2. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua demuestre que $\mid f \mid^{\alpha}$ es continua para cada $\alpha \geq 0$.
3. Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, demuestre que $\alpha f + \beta g$ es continua para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, demuestre $f \cdot g$ es continua.
5. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, demuestre que $\frac{1}{f}$ es continua.
6. Sea $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones continuas, de manera que $\mid f_i(x) \mid \leq M_i$ para cada $x \in X$ y cada $i \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ sea convergente, demuestre que entonces existe la función $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ y ella es continua.

II. Consideremos el conjunto $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, es decir los números reales a los cuales hemos agregado 2 puntos con la topología τ generada por todos los conjuntos de la forma:

$$\{-\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x < a\} \qquad \{+\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

al espacio topológico $(\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \tau)$ le llamaremos la recta real extendida y lo denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$.

Sea $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de funciones $f_\alpha : X \to \overline{\mathbb{R}}$

1. Demuestre que la función $M(x) = \sup\{f_\alpha(x) / \alpha \in \Lambda\}$ es semi continua superiormente.
2. Demuestre que la función $m(x) = \inf\{f_\alpha(x) / \alpha \in \Lambda\}$ es semi continua inferiormente.
3. Demuestre que si Λ es finito M y m ambas son continuas.

VGA,Octubre 2007