Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Topología (2007) Problemas complementarios 4.

I. Sea $A_i = \{0, 2\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De acuerdo a la definición de producto cartesiano de una familia de subconjuntos indexada por un conjunto Λ (no necesariamente finito).

1. Caracterice los elementos del conjunto:

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

2. Demuestre que la función $F : \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i :\to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ definida por

$$F((n_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{3^i}$$

   es inyectiva.

3. Caracterice geométricamente los elementos de la imagen $F(\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i) \cong \mathfrak{C}$ del intervalo $[0, 1]$. Recuerde que cada número real admite un desarrollo en base 3 con simbolos $\{0, 1, 2\}$.

4. El subconjunto $\mathfrak{C}$ del intervalo $[0, 1]$ es llamado el conjunto de Cantor, demuestre que es no numerable, cerrado y compacto.

5. Considere $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ con la topología producto y $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}$ como subespacio, demuestre que $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $\mathfrak{C}$ son homeomorfos.

6. Demuestre que $\mathfrak{C}$ es totalmente disconexo.

II. Considere los siguentes espacios topológicos:

$$S^n \qquad T^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda \qquad \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \qquad GL(n, \mathbb{R}) \qquad GL(n, \mathbb{C}) \qquad O(n, \mathbb{R})$$

la esfera unitaria n-dimensional, el toro 2-dimensional real, el plano proyectivo real, el grupo lineal general real,el grupo lineal general complejo y el grupo ortogonal real.

Determine cuales de ellos son: conexos, conexos por arcos, compactos.

VGA, Octubre 2007